

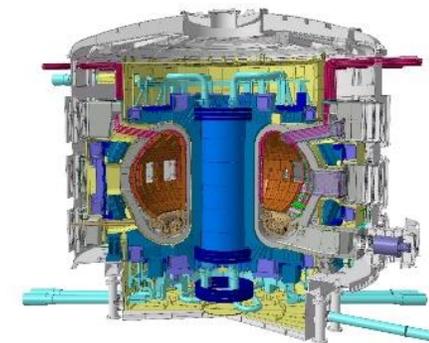
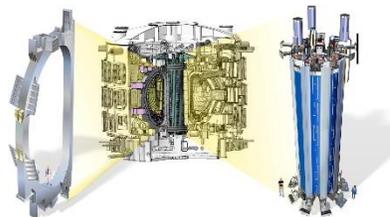
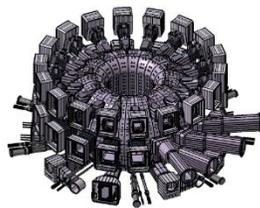
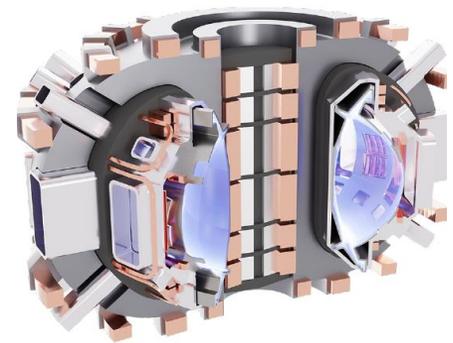


# 磁流体 (MHD) 理论基础

王晓钢

哈尔滨工业大学物理学院 北京大学聚变模拟中心

2025年7月 等离子体物理暑期学校





**磁流体模型理论基础**

**磁流体不稳定性问题**

**磁约束位形的稳定性**



# 磁流体理论基础



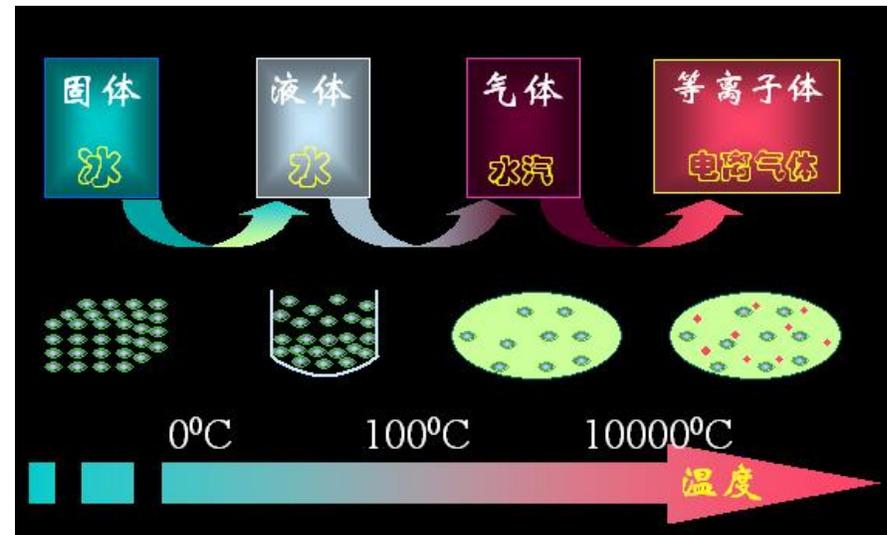
北京大学



哈爾濱工業大學  
HARBIN INSTITUTE OF TECHNOLOGY

- 加热物质会引起状态相变：

加热物质引起相变，从固态、到液态、再到气态；进一步加热，使得气体的温度升高到电离能量（ $\sim 2\text{eV}$ ,  $1\text{eV} \approx 10^4\text{K}$ ），气体被电离成为“电离气体”（ionized gas）



如果大量的气体分子被电离，则称这种“电离气体”为等离子体。

## 等离子体的科学定义：

从状态函数  $p = nT(1+g(T))$  看，等离子体本身也有不同“状态”：气态电离气体 ( $g \ll 1$ )、 “液态” 强耦合等离子体 ( $g \sim 1$ ) ， “等离子体晶格” ( $g \gg 1$ ) ， 等等

### 等离子体：包含大量非束缚态带电粒子的多粒子系统

“大量” 一词表示等离子体条件被满足，即：一个“德拜球” 中有足够多的带电粒子，  $n\lambda_D^3 \gg 1$ ； “德拜球” 的半径  $\lambda_D = (T/4\pi ne^2)^{1/2}$ ，其中  $T$  是带电粒子的温度、  $n$  是带电粒子的密度。“非束缚态” 表示这些带电粒子处于电离的状态（自由电子和离子）。

---

# 等离子体的流体描述



## 物理学的近似方法

可以严格求解的物理学问题只有“两个半”：

氢原子、一维谐振子 + 二维Ising模型

几乎所有物理学问题都做了近似

不同的时空尺度决定了不同的近似：

基础物理：宏观、慢尺度——经典近似

多体物理：宏观、慢尺度——流体近似

## 多粒子系统的流体近似

流体的宏观描述基于“流体元”的图像：即可以把近似连续分布的流体分成一个一个非常小的、也是近似连续分布的小流体元。这些流体元满足“物理无穷小”的假设：“微观”流体元的大小（特征尺度）远远小于所研究系统的特征尺度，所以可以看成是一个“无穷小”的体积元；又远大于微观粒子尺度，所以在这个体积元里物理量仍可以看成是连续分布的。

## 多粒子系统的流体近似

在任意时刻 $t$ ，任一宏观物理量（流体力学量） $f$ 皆可以看成该时刻定义在某一流体元 $d\mathbf{x}$ 上的“点” $\mathbf{x}$ 的函数： $f(\mathbf{x}, t)$ 。标识某一时刻 $t$ ，某一点 $\mathbf{x}$ 处流体元为 $c(\mathbf{x}, t)$ ，体积为 $V(\mathbf{x}, t)$ ；其基本力学量为质量 $M(\mathbf{x}, t)$ 、速度 $\mathbf{u}(\mathbf{x}, t)$ 、及其对周围流体的压强 $p(\mathbf{x}, t)$ 。因为流体元很小，其粒子分布可近似认为是均匀的，则质量密度（单位体积的质量） $\rho(\mathbf{x}, t) = M/V = n(\mathbf{x}, t)m$ ， $m$ 是单个流体粒子质量， $n(\mathbf{x}, t)$ 则是该时刻、该处的粒子数密度。

## 1. 从守恒定律的观点出发建立（单）流体的基本模型

守恒定律的基本形式

$$\frac{\partial f(\mathbf{x}, t)}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{\Gamma}_f(\mathbf{x}, t) = 0$$

$\mathbf{\Gamma}_f(\mathbf{x}, t)$  是  $f$  的流

粒子数守恒与守恒定律

$$f(\mathbf{x}, t) = n$$

$$\Gamma_n(\mathbf{x}, t) = n\mathbf{u}$$

$$\frac{\partial n(\mathbf{x}, t)}{\partial t} + \nabla \cdot (n(\mathbf{x}, t)\mathbf{u}(\mathbf{x}, t)) = 0$$

动量守恒定律与动量演化方程

$$f(\mathbf{x}, t) = n\mathbf{m}\mathbf{u} = \rho\mathbf{u}$$

$$\Gamma_{\rho\mathbf{u}}(\mathbf{x}, t) = \rho\mathbf{u}\mathbf{u} + p\mathbf{I} + \frac{\mathbf{B}\mathbf{B}}{8\pi}$$

$$\frac{\partial\rho\mathbf{u}}{\partial t} + \nabla \cdot \Gamma_{\rho\mathbf{u}} = 0 \quad \Rightarrow \quad \rho \left( \frac{\partial\mathbf{u}}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla\mathbf{u} \right) =$$

$$= -\nabla p + \frac{(\nabla \times \mathbf{B}) \times \mathbf{B}}{4\pi} = -\nabla p + \frac{\mathbf{J} \times \mathbf{B}}{c}$$

能量守恒定律与能量演化方程

$$f(\mathbf{x}, t) = \varepsilon = \frac{p}{\gamma - 1} + \frac{1}{2} \rho u^2$$

$$\mathbf{\Gamma}_\varepsilon(\mathbf{x}, t) = \left( \frac{\gamma p}{\gamma - 1} + \frac{1}{2} \rho u^2 \right) \mathbf{u}$$

$$\frac{\partial \varepsilon}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{\Gamma}_\varepsilon = 0 \quad \Rightarrow \quad \left( \frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla \right) \left( \frac{p}{\rho^\gamma} \right) \equiv \frac{d}{dt} \left( \frac{p}{\rho^\gamma} \right) = 0$$

## 2. 从微观统计物理的观点出发建立流体的基本模型

### Liouville定理

$$(X, V) \equiv (x_1, x_2, \dots, x_{N_0}; v_1, v_2, \dots, v_{N_0}) \quad N_i(X, V, t) \equiv \delta(X - X_i, V - V_i, t)$$

$$N(X, V, t) = \sum_{i=1}^{N_0} N_i(X, V, t) \quad \int dX dV N(X, V, t) = N_0$$

$$\left( \frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{V} \cdot \frac{\partial}{\partial \mathbf{X}} + \frac{\mathbf{F}}{m} \cdot \frac{\partial}{\partial \mathbf{V}} \right) N(X, V, t) = 0$$

### 单粒子分布函数及其满足的方程

$$f(\mathbf{x}, \mathbf{v}, t) = \frac{1}{V^{N_0}} \int dx_1 dv_1 \dots dx_{N_0} dv_{N_0} N(X, V, t)$$

$$\left( \frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} + \frac{\mathbf{F}}{m} \cdot \frac{\partial}{\partial \mathbf{v}} \right) f(\mathbf{x}, \mathbf{v}, t) = \frac{\delta f}{\delta t} \Big|_c$$

## 分布函数的速度各阶矩

$$n(\mathbf{x}, t) = \int d\mathbf{v} f(\mathbf{x}, \mathbf{v}, t)$$

$$\mathbf{u} = \int d\mathbf{v} \mathbf{v} f(\mathbf{x}, \mathbf{v}, t) / \int d\mathbf{v} f(\mathbf{x}, \mathbf{v}, t) = \int d\mathbf{v} \mathbf{v} f(\mathbf{x}, \mathbf{v}, t) / n(\mathbf{x}, t)$$

$$p = \frac{1}{2} m \int d\mathbf{v} (\mathbf{v} - \mathbf{u}(\mathbf{x}, t))^2 f(\mathbf{x}, \mathbf{v}, t)$$

统计力学方程  $\left( \frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} + \frac{\mathbf{F}}{m} \cdot \frac{\partial}{\partial \mathbf{v}} \right) f(\mathbf{x}, \mathbf{v}, t) = \frac{\delta f}{\delta t} \Big|_c$  的速度各阶矩

零阶矩方程:  $\frac{\partial n}{\partial t} + \nabla \cdot (n\mathbf{u}) = 0$  连续性方程

一阶矩方程:  $nm \left( \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u} \right) = -\nabla p + nq \left( \mathbf{E} + \frac{\mathbf{u} \times \mathbf{B}}{c} \right)$  力平衡方程

二阶矩截断:  $\frac{d}{dt} \left( \frac{p}{\rho^\gamma} \right) = 0$  状态方程  $\frac{\partial p}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla p = -\gamma p \nabla \cdot \mathbf{u}$

状态方程:

$$\frac{\partial p}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla p = -\gamma p \nabla \cdot \mathbf{u}$$

等压过程  $p = \text{const.}$  一阶矩方程二阶矩贡献  $\nabla p = 0$

等容过程  $\nabla \cdot \mathbf{u} = 0$  不可压缩条件,  $\gamma \rightarrow \infty$

等温过程 状态方程与连续性方程等价  $\gamma = 1$

绝热过程  $\gamma \neq 1$ , 有限

## 速度三阶矩 (能流矢量)

$$\mathbf{q} \equiv \int d\mathbf{v} \frac{1}{2} m (\mathbf{v} - \mathbf{u}(\mathbf{x}, t))^2 f(\mathbf{x}, \mathbf{v}, t) / \int d\mathbf{v} f(\mathbf{x}, \mathbf{v}, t)$$

## 能量输运方程 (速度二阶矩方程)

$$\frac{\partial \varepsilon}{\partial t} + \nabla \cdot (\varepsilon \mathbf{u}) = \mathbf{u} \cdot \frac{\mathbf{J} \times \mathbf{B}}{c} - \nabla \cdot \mathbf{q}$$

出现热对流项:  $-\nabla \cdot \mathbf{q}$

三阶矩截断:  $\mathbf{q} = -\kappa \nabla T$

## 热扩散方程

$$\frac{\partial \varepsilon}{\partial t} + \nabla \cdot (\varepsilon \mathbf{u}) = nq\mathbf{u} \cdot \mathbf{E} + \kappa \nabla^2 T$$

(标量 $q$ 是电荷)

## 多流体模型

“流体”方程 (速度各阶矩  $n_\alpha, \mathbf{u}_\alpha, n_\alpha$ ;  $\alpha = \text{species}$ )

+ 电磁场方程

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = 4\pi\rho_q \quad \rho_q = \sum n_\alpha q_\alpha$$

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$$

$$\nabla \times \mathbf{B} = \frac{4\pi}{c} \mathbf{J} + \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \quad \mathbf{J} = \sum n_\alpha q_\alpha \mathbf{u}_\alpha$$

双流体模型 (Two-Fluids) → 电子与离子时间尺度问题

→  $m_e/m_i \rightarrow 0$

$m_i \rightarrow \infty$

$m_e \rightarrow 0$

电子磁流体模型 (EMHD)

霍尔磁流体模型 (Hall MHD)

更慢宏观尺度

磁流体 (单流体) 模型 (MHD)

## 磁流体动力学 (MHD) 模型

$$\rightarrow \rho = \sum n_{\alpha} m_{\alpha},$$

$$\mathbf{u} = \frac{\sum n_{\alpha} m_{\alpha} \mathbf{u}_{\alpha}}{\sum n_{\alpha} m_{\alpha}},$$

$$p = \sum p_{\alpha}$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{u}) = 0$$

$$\rho \left( \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u} \right) = -\nabla p + \frac{\mathbf{J} \times \mathbf{B}}{c} = -\nabla p + \frac{(\nabla \times \mathbf{B}) \times \mathbf{B}}{4\pi}$$

$$\frac{\partial p}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla p = -\gamma p \nabla \cdot \mathbf{u}$$

$$\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = \nabla \times (\mathbf{u} \times \mathbf{B}) \quad \left( \mathbf{E} + \frac{\mathbf{u} \times \mathbf{B}}{c} = 0 \right)$$

## “磁冻结”效应

$$\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = \nabla \times (\mathbf{u} \times \mathbf{B})$$

1. 磁力线“冻结”在等离子体中
2. 可以通过观测等离子体运动观测磁力线运动

**磁流体理论重要贡献！**

### 伽利略体系中的电磁波

1. 电磁波是麦克斯韦电磁理论的主要贡献？
2. 研究电磁波的电磁体系不能使用伽利略变换？

**磁流体理论说：No！**

### 伽利略体系中的电磁波

1. 理想磁流体方程组满足伽利略变换!
2. 理想磁流体方程组存在Alfven波解!  
—— 不需要麦克斯韦位移电流项

磁流体理论拓展了物理学的认知!



# 磁流体平衡及其稳定性



北京大学



哈爾濱工業大學  
HARBIN INSTITUTE OF TECHNOLOGY



## 磁流体 (MHD) 平衡

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{u}) = 0$$

$$\rho \left( \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u} \right) = -\nabla p + \frac{\mathbf{J} \times \mathbf{B}}{c}$$

$$\frac{\partial p}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla p = -\gamma p \nabla \cdot \mathbf{u}$$

$$\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = \nabla \times (\mathbf{u} \times \mathbf{B})$$

$$\xrightarrow{\partial/\partial t=0, \mathbf{u}=0}$$

$$\nabla p = \frac{\mathbf{J} \times \mathbf{B}}{c}$$

$$\nabla p \perp \mathbf{J}, \mathbf{B}$$

$\nabla_{\perp} p$  是磁面的法线,

$\mathbf{J}, \mathbf{B}$  形成磁面



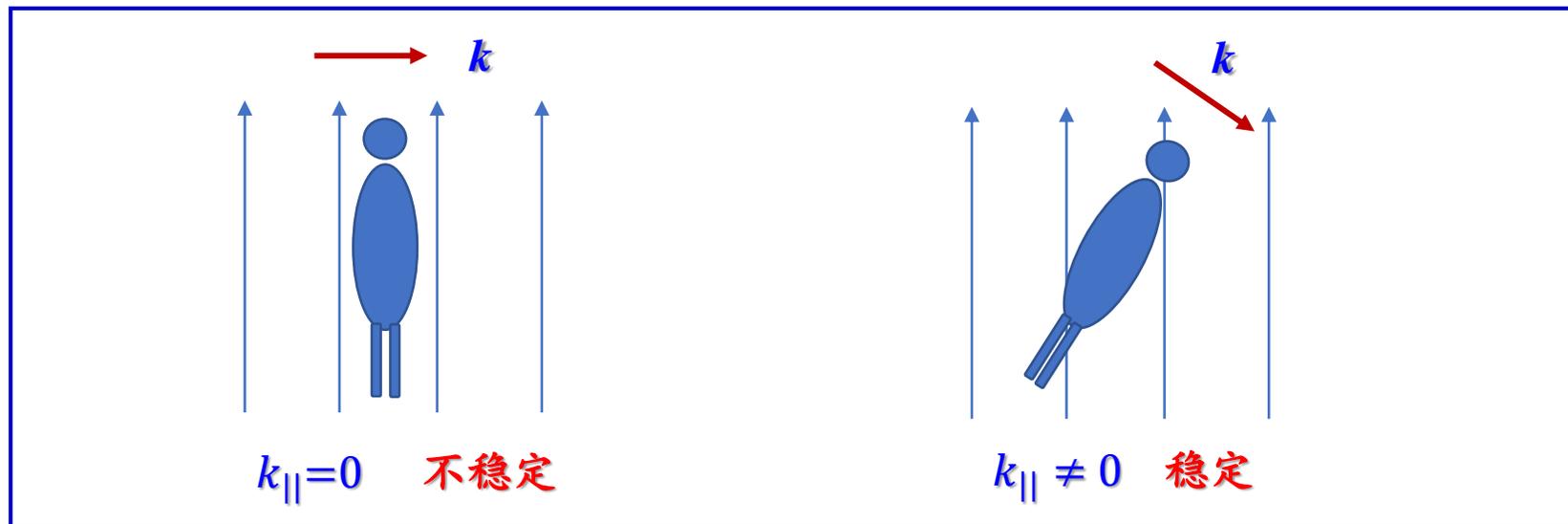
## 磁流体 (MHD) 稳定性

研究这个问题的办法，就是给处于已知平衡状态的等离子体一个非常小的扰动

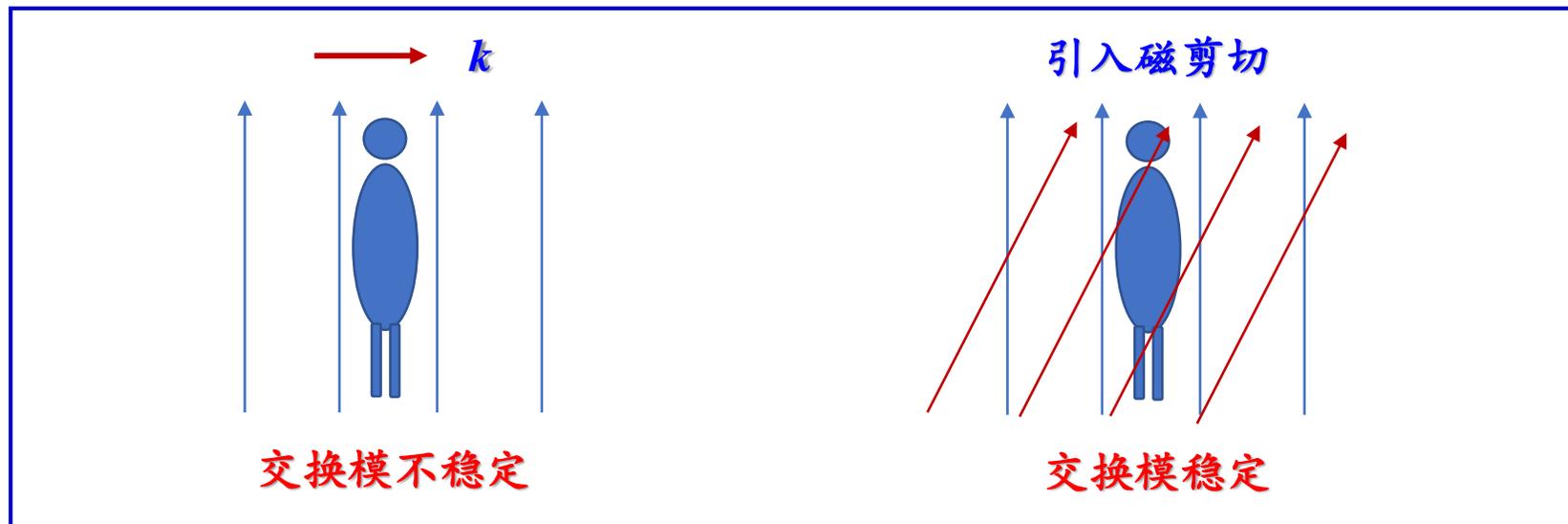
—— 如果扰动使得等离子体离开这一平衡，说明其没有处于最低能量的状态，或者说，等离子体中存在可以释放的“自由能” (Free Energy)；我们说这样的等离子体平衡是不稳定的

—— 如果扰动后等离子体仍回到原来的平衡，则其一定处于最低能量的状态，或者说，等离子体中没有可以释放的“自由能”；我们说这样的等离子体平衡是稳定的

变化方向（波矢 $k$ 的方向）垂直磁力线 —— 最不稳定



## 直接激发 $k_{\parallel}=0$ : 交换模





磁剪切在剪切方向引入新的磁场梯度 —— 形成电流片

会激发电流驱动不稳定性 —— 扭曲模与撕裂模

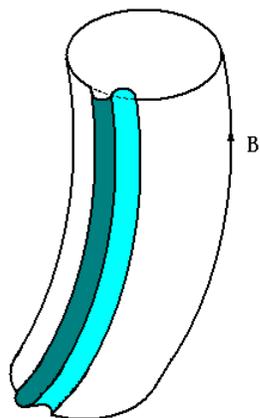
$$(\delta W)_J = -\frac{1}{2} \int d\mathbf{x} \left[ \frac{\mathbf{J}_0 \cdot \mathbf{B}_0}{c\mathbf{B}_0^2} (\boldsymbol{\xi}_\perp^* \times \mathbf{B}_0) \cdot \mathbf{B}_{1\perp} \right]$$

具有：1) 平行磁场的电流；

2) 因平行电流产生垂直平衡磁场的位移和磁场扰动

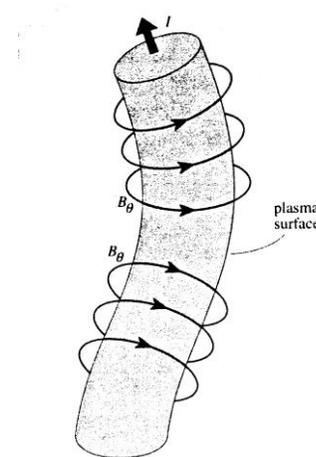
造成磁力线进一步“扭曲”

## 交换模



沿螺旋磁力线“刻槽”

## 扭曲模



进一步“扭曲”原来的螺旋磁力线



**扰动后的磁面都呈螺旋型：**

**电流的“扭曲”是低能态 —— 闪电**

**螺旋型“扭曲”的磁面是低能态**

- (1) 仿星器的螺旋磁面已经是低能态，所以更稳定
- (2) 反场箍缩的准单螺旋态显然也是低能态





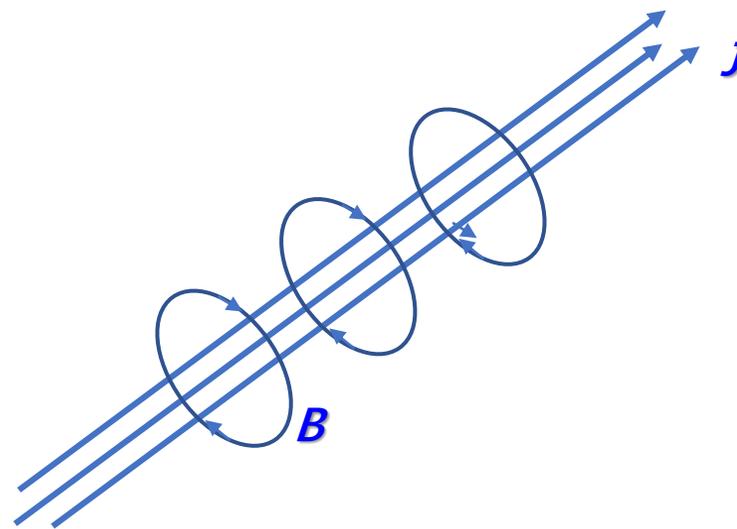
# 磁约束位形的稳定性



- 怎样产生和约束等离子体

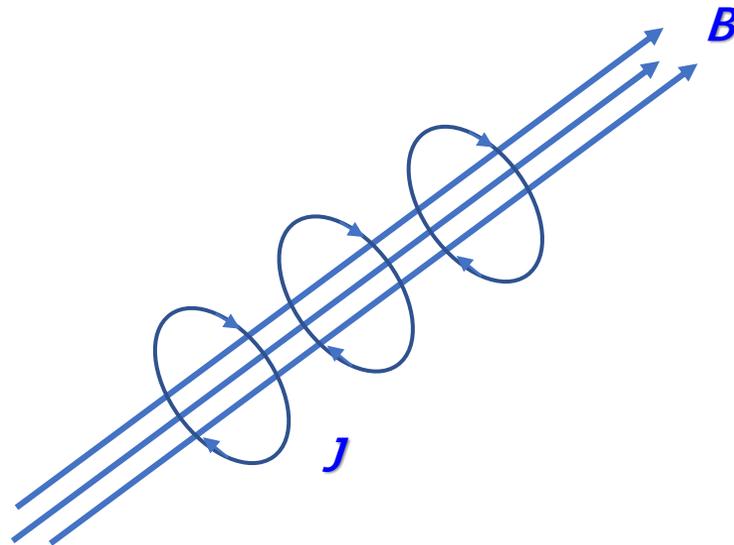
- 电流箍缩

轴向箍缩 (z-pinch)  
电流在等离子体中



- 电流箍缩

角向箍缩 ( $\theta$ -pinch)  
电流在等离子体外





- 电流箍缩

螺旋箍缩 (screw-pinch)  
前二者叠加





轴向箍缩 (z-pinch)

$B = B_\theta, B_z = 0 \rightarrow$  腊肠不稳定性

角向箍缩 ( $\theta$ -pinch)

$B = B_z, B_\theta = 0 \rightarrow$  绝对稳定

$$q = rB_z / RB_\theta$$

螺旋箍缩

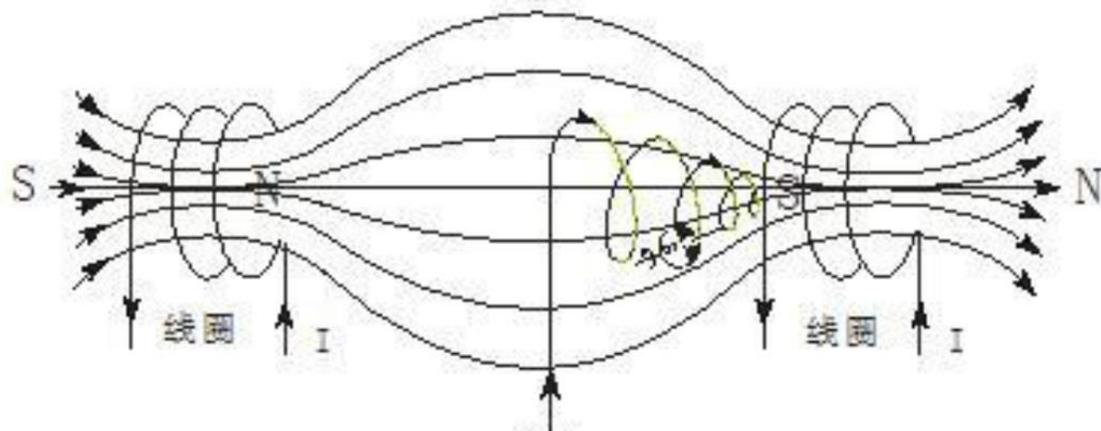
螺旋不稳定性, 需要磁剪切抑制——相对稳定

——首选角向箍缩



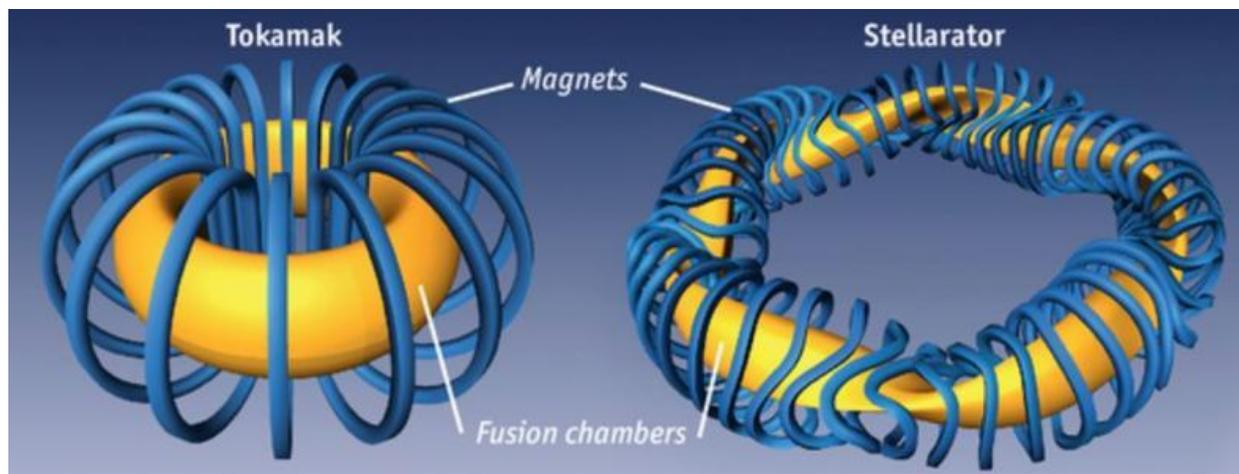
## 解决角向箍缩 ( $\theta$ -pinch) 的端效应

方法一：两头堵 —— 磁镜



## 解决角向箍缩 ( $\theta$ -pinch) 的端效应

方法二：两头对 —— 托卡马克、仿星器





## 物理稳定性

角向箍缩 ( $\theta$ -pinch)

—— 最接近 $\theta$ -pinch的环形装置 (托卡马克、仿星器)

—— 磁约束聚变装置选托卡马克位形的原因之一





## 物理稳定性 $\rightarrow$ 拓扑稳定性

梯度带来自由能，物理量的梯度是磁面的法线

磁面上物理量为一常数（磁面函数）

带电粒子运动（包括各种漂移）被约束在磁面上

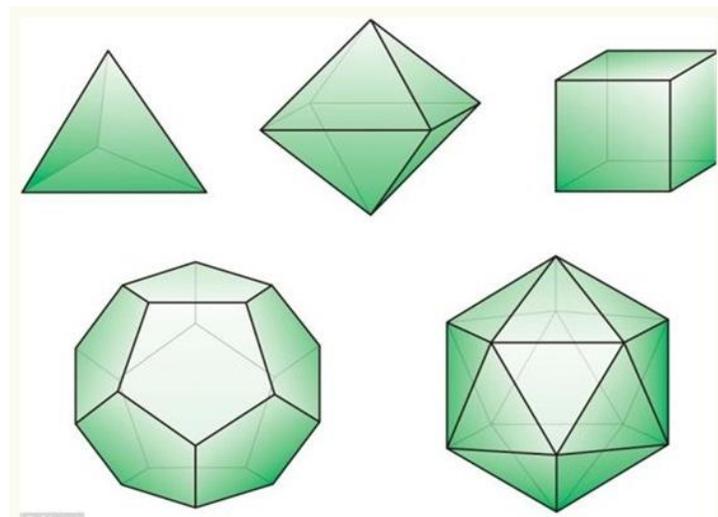
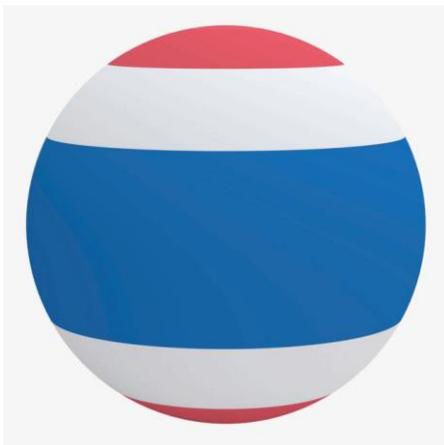
封闭磁面保证了带电粒子的“封闭性”约束

—— 封闭磁面的拓扑稳定性质



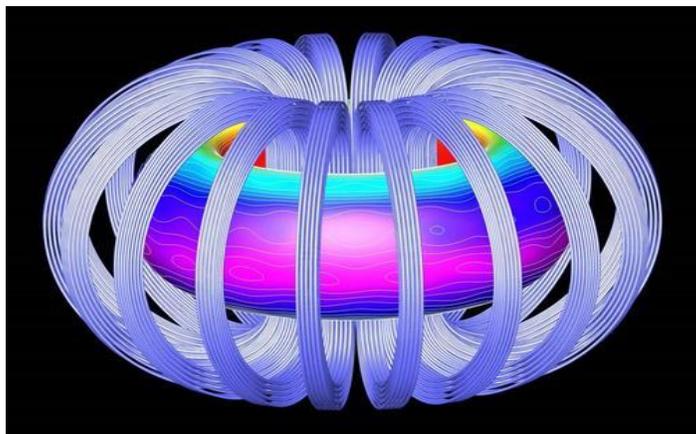
单联通封闭磁面：FRC，球马克，。。。

—— 上下两个“奇点”



## 多联通封闭环形磁面：各种环形装置

—— 拓扑稳定  
一条磁力线全部覆盖





**托卡马克、仿星器：**

**物理稳定性和拓扑稳定性都是首选**





## 托卡马克位形稳定性（定性分析）

无理磁面可以被磁力线完全覆盖 —— 稳定

有理磁面上磁力线只能覆盖有限面积 —— 不稳定

高模数有理面几乎被磁力线覆盖 —— 比较稳定

低模数有理面几乎没有磁力线覆盖 —— 最不稳定





# 附录



北京大学



哈爾濱工業大學  
HARBIN INSTITUTE OF TECHNOLOGY



# 托卡马克破裂现象



北京大学



哈爾濱工業大學  
HARBIN INSTITUTE OF TECHNOLOGY



## 电流驱动不稳定性的非线性演化:

电流丝化: 非线性饱和 —— 稳态或缓慢衰减 (空间等离子体)

丝化 → 电流密度增大、截面变小, 正反馈 —— 非线性快增长

(1) 截面小到一定程度: 电流密度极大, 逃逸电子产生

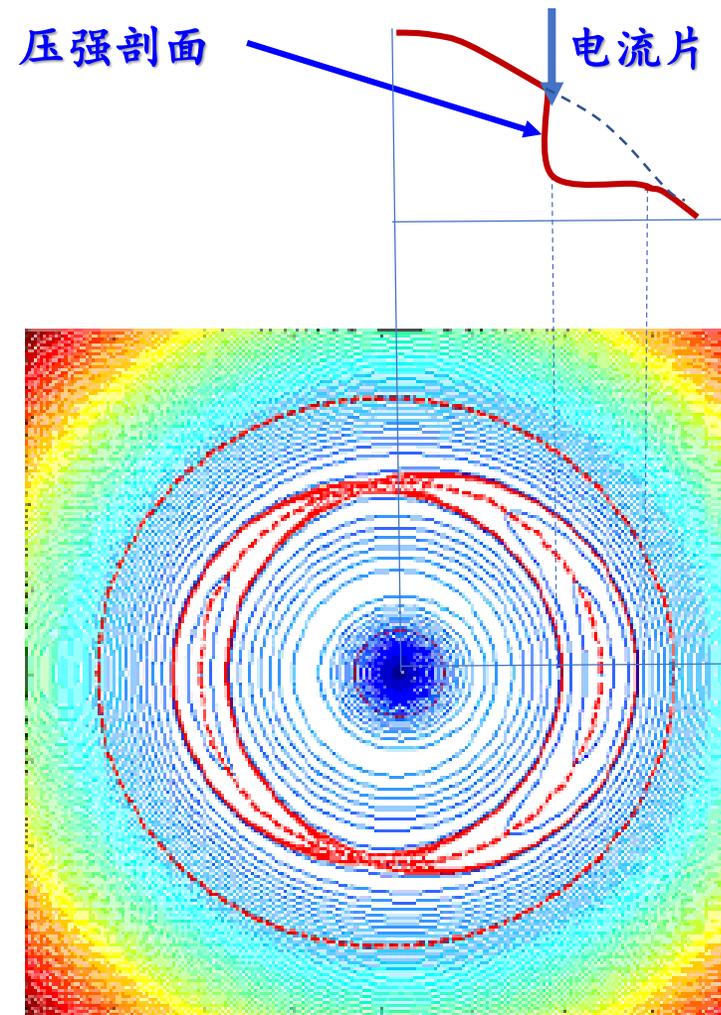
(2) 电流进一步增强: 极度扭曲 → 触壁 (打到固定处) → 大破裂

—— Alfvén limit: 自身磁场将电流“折回”的效应



## 电流增强的正反馈驱动：

- (1) 热淬灭引起电流通道急剧收缩
  - (2) 电流通道收缩进一步加快温度剖面崩塌
  - (3) 形成正反馈过程 —— 大破裂
- \* 磁重联形成磁岛导致芯部边缘“短路”



## 引起破裂的主要原因:

- (1) 新经典撕裂模: 磁岛更大, 影响区域大
- (2) 内部输运垒: 压强剖面与NTM相似
- (3) 磁岛重叠: 随机性更强、影响区域更大
- (4) 垂直不稳定性: 源于X点拓扑不稳定性

