



2025年度中国等离子体物理暑期学校



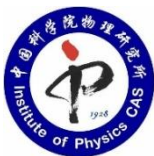
等离子体不稳定性 ——磁流体力学理论

李 定

中科院物理所

*Email: dli@iphy.ac.cn

李定 20250708_14:00-17:50 科大3教103, 合肥

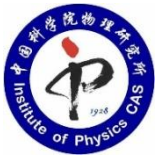




目 录



-
- 一、磁流体力学(MHD)理论简介
 - 二、简正模方法（利用微扰论求解）
举例：Rayleigh-Taylor不稳定性
 - 三、简正模方法（利用边界层理论求解）
举例：撕裂模不稳定性
 - 四、能量原理方法（利用变分原理）
举例：直线箍缩等离子体柱的不稳定性
 - 五、结论与讨论





磁流体动力学的理论

- Alfvén发展的磁流体力学波理论奠定了空间等离子体物理的基础。Alfvén开拓了磁流体动力学的研究领域。他首先意识到等离子体是宇宙中比固态、液态或气态更为普遍的物质状态。
- 1942年，他在太阳黑子的研究中发现太阳中电离气体的磁流体力学波，即阿尔芬波。Alfvén关于磁流体动力学的研究对于受控热核聚变研究，超音速飞行，外空推进器动力及飞行器再入地球大气圈时的制动都起着非常重要的作用。



Hannes O. G. Alfvén (1908-1995), 1970年因在磁流体动力学上的发现及其在等离子体物理中的应用获诺贝尔物理学奖。





地球电离层和电波传播

- 1901年, Marconi第一次完成了从英到美的长距离无线电通讯实验, 有人认为地球80km以上大气导电, 得以反射无线电波。
- 1925年, Appleton在英国, Breit和Tuve在美国分别通过垂直向上发射无线电波并接收到了发射回波, 确认了电离层的存在。1929年引入“电离层”名词, 还发现电离层具有分层结构。
- 1931年, Chapman从理论上导出太阳辐射强度、大气成分分布和电离层产生率之间的定量关系, 为电离层形成机制奠定了理论基础。



Edward V. Appleton (1892-1965), 1945年因发现电离层F层并发展了电离层中电波传播的理论获诺贝尔物理学奖。

——王水, 空间物理学的回顾和展望, 2001

李定 20250708_14:00-17:50 科大3教103, 合肥





等离子体不稳定性

- 等离子体平衡一般指力学平衡，故平衡方程可有时间无关的解。但若等离子体不处于热力学平衡态，例如其宏观参量及磁场空间非均匀，或带电粒子非Maxwell分布，则其力学平衡就是一种不稳定或亚稳态的平衡。
- 由于等离子体具有过剩的自由能，也即具有驱动不稳定性的源，则偏离力学平衡的小扰动就有可能导致不稳定性，通过释放体系的自由能，使其更接近真实的热力学平衡。
- 等离子体中若出现某种扰动，且扰动强度随时间而增长，则称等离子体具有不稳定性。不稳定性有时会导致破裂。绝大多数不稳定性伴随着波和其它等离子体振荡的自然（线性）模，尽管有些模仅仅起因于非线性效应。

——《等离子体物理学》，李定、陈银华、马锦秀、杨维纭编著，高等教育出版社，2006。





等离子体不稳定性

- **微观不稳定性 (Microinstability) :** 由速度空间的各向异性所驱动, 涉及到等离子体在速度空间的变化, 对输运过程会产生影响, 但一般不会引起位形空间的大尺度扰动, 通常必须用等离子体动理学来描述。
- **宏观不稳定性 (Macroinstability) :** 由等离子体宏观参量的非均匀性所驱动, 只涉及等离子体在位形空间中的运动, 扰动频率低, 扰动尺度大, 通常可以用磁流体力学来描述。例如, 密度梯度会导致 Rayleigh-Taylor 不稳定性, 压强梯度会导致交换模 (气球模) 不稳定性, 速度梯度会导致 Kelvin-Helmholtz 不稳定性, 电流密度梯度会导致撕裂模不稳定性等等。
- **研究磁流体力学不稳定性的方法通常采用直观分析(intuitive method), 简正模分析(normal mode analysis)和能量原理 (energy principle) 等分析方法。**

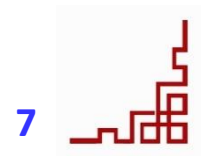
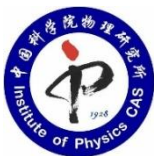




不稳定性的研究方法——直观分析方法



1. 直观分析方法是给平衡位形以某种扰动，分析作用于等离子体上的力的变化。
 - 如果扰动引起的作用力使起始扰动向增大的方向发展，则等离子体是不稳定的；
 - 反之若扰动引起的作用力指向使起始扰动减小的方向，则等离子体是稳定的。
 - 这种方法能够帮助人们直观地了解宏观不稳定性产生的物理机制，为进一步进行物理分析提供基础，但很难给出不稳定性的增长率。





不稳定性的研究方法——简正模分析

2. 简正模分析是将不稳定性的增长或波的振荡作为本征值问题来处理的一种方法。将随时间变化的扰动量表示成傅立叶分量的形式，带入到线性化的磁流体力学方程之中，对扰动变量的增长率或时间演化进行分析。
- 对于不考虑空间变化的局域模，可得到色散关系，若解出所有简正模式的频率均为实数，则所有扰动变量将做简谐振荡，等离子体是稳定的；若至少有一个简正模式的频率有正虚部，则该扰动模式将随时间增长，等离子体系统是不稳定的。
 - 对于考虑了空间变化的非局域模来说，可得到描述扰动量空间变化的微分方程，此时必须考虑边界条件，通过求解微分方程导出扰动变量的增长率。
 - 这种方法的优点是可得到不稳定性增长率的解析表达式，但对于复杂的磁场位形往往很难求解。

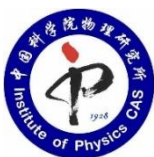




不稳定性研究方法——能量原理

3. 能量原理是根据力学的普遍原理，考察系统位能是否处于极小来判断稳定性的一种方法。其基本思想就是通过研究偏离平衡位形的小扰动所引起的系统位能的变化来确定等离子体体系的稳定性。

- 如果对于所有可能的偏离平衡的位移扰动，系统的位能增加，则等离子体体系是稳定的。
- 如果对于某一种位移扰动，系统的位能减少，则等离子体体系是不稳定的。
- 这种方法的优点是对于复杂的磁场位形有可能判断等离子体体系的稳定性，但往往导出的是充分条件而非必要条件，而且不能给出不稳定性的增长率。





描写流体运动的方法——拉格朗日方法

● 拉格朗日方法（随体法）：

- 在拉格朗日方法中，着眼点是流体质点，确定所有流体质点的运动规律，即它们的位置随时间变化的规律。十分明显，如果知道了所有流体质点的运动规律，那么整个流体运动的状况也就清楚了。
- 通常利用初始时刻流体质点的坐标作为区分不同流体质点的标志。设初始时刻 $t = t_0$ 时，流体质点的坐标是 a, b, c ，它可以是曲线坐标，也可以是直角坐标，重要的是给流体质点以标号而不在于采取什么具体的方式。我们约定采用 a, b, c 的组合来区别流体质点，于是流体质点的运动规律可表为下列矢量形式：

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}(t; a, b, c)$$

- 其中 $\mathbf{r}$ 是流体质点的矢径。变数 $t; a, b, c$ 称为拉格朗日变数。如果固定 a, b, c 而令 t 改变，则得某一流体质点的运动规律。在拉格朗日观点中，矢径函数 $\mathbf{r}$ 的定义区域不是场，因为它不是空间坐标的函数，而是质点标号的函数。



描写流体运动的方法——拉格朗日方法(续)



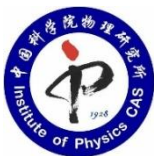
- 为了得到确定流体质点的速度 u ，只要将矢径对 t 微分而把坐标 a, b, c 当作常数就可以了，即

$$\mathbf{u} = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial t} = \frac{\partial \mathbf{r}(t; a, b, c)}{\partial t}$$

- 类似地，可以得到确定流体质点的加速度：

$$\dot{\mathbf{u}} = \frac{\partial^2 \mathbf{r}}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 \mathbf{r}(t; a, b, c)}{\partial t^2}$$

- 式中，如给 a, b, c 以不同的值而令 t 不变，则得到在确定时刻 t 流体质点的速度和加速度分布；特别是，若 $t = t_0$ 而 a, b, c 可以改变，则可得流体质点的起始速度和加速度分布。





描写流体运动的方法——欧拉方法

● 欧拉方法（当地法）：

- 欧拉方法不直接考虑个别流体质点如何运动，而是用场的观点研究流体运动。它只聚焦于发生在空间给定点的流动情况；对于流体质点从何处来和如何在时刻 t 达到这一点，然后到何处去和怎样去，从欧拉方法观点看来并不是基本的。这样，欧拉方法是把空间某一固定点 (x, y, z) 的流体质点的速度当作时间的函数来研究的；显然，这个速度也是坐标 (x, y, z) 的函数，是速度场。因此，

$$\mathbf{u} = \mathbf{u}(t; \mathbf{r}); \mathbf{r} = (x, y, z)$$

- 变数 $t; x, y, z$ 称为欧拉变数。若固定 x, y, z 而令 t 改变，则得到不同时刻经过确定空间点的不同流体质点的速度；若固定 t 而令 x, y, z 改变，则可得到对于确定时刻空间中流体质点的速度分布。
- 采用欧拉观点描述运动时，可利用场论的知识。若场内函数不依赖矢径 $\mathbf{r}$ 则称之为均匀场，反之称之为非均匀场；若场内函数不依赖时间则称为定常场，反之称为非定常场。



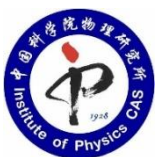


描写流体运动的方法——欧拉方法(续)

- 当求流体质点的加速度时，要从两个不同观点来考虑这个问题。
- 当不同流体质点经过空间中给定点时，该点的速度怎样随时间变化？将 $u = u(t; r)$ 对时间偏微商即可， $\partial u / \partial t$ 为局地微商。
- 在给定时刻经过空间中 (x, y, z) 点时，流体质点的加速度怎么算？此时坐标 (x, y, z) 就应视为可变的，因在无限小的时间间隔中，所考虑的流体质点正在从 (x, y, z) 点进入到新位置。由于运动点本身的坐标是时间的函数，因此 $u = u(t; r)$ 对时间的微商为流体质点的加速度

$$\frac{du}{dt} = \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial u}{\partial y} \frac{dy}{dt} + \frac{\partial u}{\partial z} \frac{dz}{dt} = \frac{\partial u}{\partial t} + (u \cdot \nabla)u$$

- du/dt 是沿着流体质点的轨道计算的，因此称为随体微商。 $(u \cdot \nabla)u$ 是速度对时间的迁移微商，表示速度由于该流体质点在空间位移而产生的变化。即在给定时刻经过空间中指定点的流体质点的加速度，是由该点的速度矢量的局地改变与流体质点运行时的速度矢量的迁移改变之和来决定的。





流体力学描述

- 在研究等离子体的宏观运动时，若等离子体的密度较大，粒子间碰撞频繁，通常可以近似地把它当作磁流体来处理。
- 这种模型适合于缓慢变化的等离子体现象。所谓缓慢变化是指等离子体的特征长度（在此长度内等离子体参数产生显著变化）远大于等离子体粒子的平均自由程（比如说，离子回旋半径）；等离子体的特征时间（在此时间内等离子体参数产生显著变化）远大于等离子体粒子的平均碰撞时间（比如说，离子回旋周期）。
- 在这种情况下，等离子体可以近似地看作处于局部热平衡状态，因而可以像通常的流体力学中那样定义流体的速度、压强、密度、温度等流体力学及热力学参量，并用这些宏观参量来描述等离子体的宏观运动。





流体力学描述(续)

- 磁流体中产生的现象的特点是，除了具有一般流体中的重力、压强、粘滞力等作用外，还有电磁力起很大作用。当磁流体在磁场中运动时，将感应出电场，产生感应电流。这个电流一方面与磁场相互作用，产生洛伦茨力，改变流体的运动，另一方面又引起原有磁场的改变。因此，磁流体的运动比通常流体复杂得多。研究磁流体在电磁场中运动规律的学科称为磁流体力学 (Magnetohydrodynamics)。
- **单流体描述（磁流体力学描述）**：如果不需要区别离子流体和电子流体的运动，通常用磁流体力学方程组描述。
- **双流体描述**：如果离子流体和电子流体的运动需要单独刻画，用双流体力学方程组描述。
- **多流体描述**：如果除离子和电子而外，需要包括杂质、尘埃或高能粒子等，用多流体力学方程组描述。





举例：导出连续性方程

- 体积为 V 的流体的总质量为 $\int_V \rho dV$ ，从这个体积里流出来的质量流是 $\int_{\Sigma} \rho \mathbf{u} \cdot d\mathbf{S}$ ，这里 ρ 为流体密度， Σ 为体积 V 的封闭曲面。根据质量守恒定律， V 中的流体质量的变化率恒等于通过 Σ 流出的质量流，再利用高斯定理，则有

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_V \rho dV = - \int_{\Sigma} \rho \mathbf{u} \cdot d\mathbf{S} = - \int_V \nabla \cdot (\rho \mathbf{u}) dV$$

- 由于体积 V 的任意性，立即可得连续性方程

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{u}) = 0$$

- 对于定常流体 ($\partial/\partial t = 0$)，则连续性方程变成

$$\nabla \cdot (\rho \mathbf{u}) = 0$$

- 对于不可压缩流体 ($d\rho/dt = 0$)，则有

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0$$





波尔兹曼方程

$$\frac{df}{dt} = \frac{\partial f}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla f + \frac{\mathbf{F}}{m} \cdot \frac{\partial f}{\partial \mathbf{v}} = \left(\frac{\partial f}{\partial t} \right)_c$$

- 其中 $\mathbf{F}$ 是作用在粒子上的力，在等离子体中主要是电磁力， $\nabla = \partial/\partial \mathbf{r}$ 是坐标空间的梯度算符， $\partial/\partial \mathbf{v}$ 是速度空间的梯度算符。由于分布函数代表相空间的粒子数密度，
- 方程左边各项的物理意义如下：
 - 第一项为当地导数，
 - 第二项为坐标空间的随流导数，
 - 第三项为速度空间的随流导数 ($\mathbf{F}/m$ 为加速度，与坐标空间随流导数相似)。
- 方程的右边代表碰撞引起分布函数的变化率。





由矩方程可得MHD方程

- 设 α 类粒子的一个物理量 $\Psi_\alpha(r, \mathbf{v}_\alpha, t)$ 在速度空间的平均值为

$$\langle \Psi_\alpha \rangle = \int \Psi_\alpha f_\alpha d\mathbf{v}_\alpha / \int f_\alpha d\mathbf{v}_\alpha = \frac{1}{n_\alpha} \int \Psi_\alpha f_\alpha d\mathbf{v}_\alpha$$

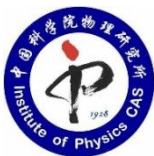
$$\int \left(\frac{\partial f_\alpha}{\partial t} + \mathbf{v}_\alpha \cdot \frac{\partial f_\alpha}{\partial \mathbf{r}} + \frac{q_\alpha}{m_\alpha} (\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}) \cdot \frac{\partial f_\alpha}{\partial \mathbf{v}} \right) d\mathbf{v}_\alpha = \int \Psi_\alpha f_\alpha d\mathbf{v}_\alpha$$

- 将 $\Psi_\alpha = m_\alpha, m_\alpha \mathbf{v}_\alpha, m_\alpha \mathbf{v}_\alpha^2/2$ 代入上面的方程并对 α 求和, 可得连续性方程、动量方程和能量方程

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{u}) = 0$$

$$\rho \frac{d\mathbf{u}}{dt} = \nabla \cdot \mathbf{P} + \mathbf{j} \times \mathbf{B}$$

$$\rho \frac{d}{dt} \left(\varepsilon + \frac{\mathbf{u}^2}{2} \right) = \nabla \cdot (\mathbf{P} \cdot \mathbf{u}) + \mathbf{E} \cdot \mathbf{j} - \nabla \cdot \mathbf{q}$$





磁流体力学方程组

连续性方程

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{u}) = 0$$

运动方程

$$\rho \frac{d\mathbf{u}}{dt} = \nabla \cdot \mathbf{P} + \mathbf{j} \times \mathbf{B}$$

能量方程

$$\rho \frac{d}{dt} \left(\varepsilon + \frac{\mathbf{u}^2}{2} \right) = \nabla \cdot (\mathbf{P} \cdot \mathbf{u}) + \mathbf{E} \cdot \mathbf{j} - \nabla \cdot \mathbf{q}$$

状态方程

$$p = p(\rho, T)$$

麦克斯韦方程

$$\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = -\nabla \times \mathbf{E}$$

$$\mathbf{j} = \frac{1}{\mu_0} \nabla \times \mathbf{B}$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$$

欧姆定律

$$\mathbf{j} = \sigma(\mathbf{E} + \mathbf{u} \times \mathbf{B})$$

- 其中 $\rho = \sum_{\alpha} m_{\alpha} n_{\alpha}$, $\mathbf{u} = \sum_{\alpha} m_{\alpha} n_{\alpha} \mathbf{u}_{\alpha} / \rho$, $\mathbf{j} = \sum_{\alpha} e_{\alpha} n_{\alpha} \mathbf{u}_{\alpha}$, $p = \sum_{\alpha} p_{\alpha}$.





磁流体力学方程组

- MHD方程中 P 为应力张量,

$$\mathbf{P} = 2\eta\mathbf{S} - \left(p + \frac{2}{3}\eta\nabla \cdot \mathbf{u} - \eta'\nabla \cdot \mathbf{u} \right) \mathbf{I}$$

- 其中 η 为粘滞系数, 取决于流体的物理性质和温度, η' 为第二粘滞系数, 源于流体的可压缩性。 $\mathbf{I}$ 为单位张量, $\mathbf{S}$ 为变形速度张量

$$\mathbf{S} = \begin{pmatrix} \frac{\partial u_x}{\partial x} & \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_y}{\partial x} + \frac{\partial u_x}{\partial y}\right) & \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_z}{\partial x} + \frac{\partial u_x}{\partial z}\right) \\ \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_y}{\partial x} + \frac{\partial u_x}{\partial y}\right) & \frac{\partial u_y}{\partial y} & \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_z}{\partial y} + \frac{\partial u_y}{\partial z}\right) \\ \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_z}{\partial x} + \frac{\partial u_x}{\partial z}\right) & \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_z}{\partial y} + \frac{\partial u_y}{\partial z}\right) & \frac{\partial u_z}{\partial z} \end{pmatrix}$$

- $\mathbf{q} = -\kappa\nabla T$ 为热流。





理想磁流体力学方程组

$$\left\{ \begin{array}{ll} \text{连续性方程} & \frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{u}) = 0 \\ \text{运动方程} & \rho \frac{d\mathbf{u}}{dt} = \nabla \cdot \mathbf{P} + \mathbf{j} \times \mathbf{B} \\ \text{状态方程} & p = p(\rho, T) \\ \text{麦克斯韦方程} & \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = -\nabla \times \mathbf{E} \\ & \mathbf{j} = \frac{1}{\mu_0} \nabla \times \mathbf{B} \\ & \nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \\ \text{欧姆定律} & \mathbf{E} + \mathbf{u} \times \mathbf{B} = \mathbf{0} \end{array} \right.$$

- 其中 $\rho = \sum_{\alpha} m_{\alpha} n_{\alpha}$, $\mathbf{u} = \sum_{\alpha} m_{\alpha} n_{\alpha} \mathbf{u}_{\alpha} / \rho$, $\mathbf{j} = \sum_{\alpha} e_{\alpha} n_{\alpha} \mathbf{u}_{\alpha}$, $p = \sum_{\alpha} p_{\alpha}$ 。





双流体力学方程组

- 当所描述的等离子体波频率较高波长较短时，电子仍能很好地响应波的电磁场的变化，但是离子由于惯性大，往往有滞后效应。等离子体中会出现空间电流和电荷，此时需要采用双流体力学方程组来描述。 $M_{\alpha\beta}$ 为两种流体间碰撞引起的动量变化率， $M_{ei} = -M_{ie}$ 。

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{连续性方程} \quad \frac{\partial n_{\alpha}}{\partial t} + \nabla \cdot (n_{\alpha} \mathbf{u}_{\alpha}) = 0 \\ \text{运动方程} \quad m_{\alpha} n_{\alpha} \frac{d\mathbf{u}_{\alpha}}{dt} = -\nabla p_{\alpha} + n_{\alpha} q_{\alpha} (\mathbf{E} + \mathbf{u}_{\alpha} \times \mathbf{B}) + \mathbf{M}_{\alpha\beta} \\ \text{麦克斯韦方程} \quad \begin{aligned} \nabla \cdot \mathbf{E} &= \frac{1}{\epsilon_0} \sum_{\alpha} n_{\alpha} q_{\alpha} \\ \nabla \times \mathbf{B} &= \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} + \mu_0 \sum_{\alpha} n_{\alpha} q_{\alpha} \mathbf{u}_{\alpha} \\ \nabla \times \mathbf{E} &= -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \\ \nabla \cdot \mathbf{B} &= 0 \end{aligned} \end{array} \right.$$





广义欧姆定律

- 利用双流体力学方程组，可导出广义欧姆定律的一般形式为

$$\mathbf{j} = \sigma \left[(\mathbf{E} + \mathbf{u} \times \mathbf{B}) - \frac{1}{en} \mathbf{j} \times \mathbf{B} + \frac{1}{en} \nabla p_e \right]$$

洛伦兹力 霍尔电动势 电子热压力

双流体的特性就是由这后两项表征出来的。

- 若压力与洛伦兹力有相同的量级，则这后两项也是同量级的。可比较洛伦兹力项与左边的电流密度的量级关系：

$$\therefore \frac{\sigma}{en} = \frac{e}{m_e v_{ei}} = \frac{\omega_{ce}}{B v_{ei}}, \quad \therefore \frac{\sigma(\mathbf{j} \times \mathbf{B})}{en \mathbf{j}} \sim \frac{\omega_{ce}}{v_{ei}}$$

- 显然，当 $\omega_{ce} \ll v_{ei}$ 时，广义欧姆定律后两项可忽略不计，回到 $\mathbf{j} = \sigma(\mathbf{E} + \mathbf{u} \times \mathbf{B})$ 。
- 当 $\omega_{ce} \gg v_{ei}$ 时，广义欧姆定律后两项将远大于电流密度 $\mathbf{j}$ 。在垂直于电磁场的方向会有一个霍尔电流。





附：等离子体中的量级分析



- 等离子体中有很多不同量级的空间和时间特征尺度。
- 例如空间特征长度有朗道长度、德拜半径、电子回旋半径、离子回旋半径、装置的尺寸等等。
- 例如时间特征尺度有阿尔芬时间、电阻扩散时间、能量约束时间、振荡周期、平均碰撞时间等等。
- 尽管等离子体参数空间很大，时空特征尺度的绝对值可相差甚远，但一些特征尺度之间的相对量级关系可比。建立物理模型时，量级分析往往是解决问题的关键。
- 在此意义上可以理解，为何等离子体的描述方法几乎放之四海而皆准，适用于参数空间如此广阔的等离子体。





磁感应方程

- 从 Maxwell 方程和 Ohm 定律可以导出磁感应方程：

$$\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = \nabla \times (\mathbf{u} \times \mathbf{B}) + \frac{\eta}{\mu_0} \nabla^2 \mathbf{B}$$

对流项 磁扩散项

这里 η 称为电阻率， $\eta/\mu_0 = \eta_m$ 称为磁粘滞系数或磁扩散系数。

- 磁场在导电流体中的运动性质显著地依赖于该两项的比值

$$\frac{|\nabla \times (\mathbf{u} \times \mathbf{B})|}{|\eta_m \nabla^2 \mathbf{B}|} \approx \frac{|\mathbf{u} \times \mathbf{B}|}{|\eta_m \nabla \times \mathbf{B}|} \approx \frac{UB}{\eta_m BL^{-1}} = \frac{UL}{\eta_m}$$

这里 L 是磁场的空间特征长度， U 为流体运动的特征速度。

- 类似于流体力学中的雷诺数，定义磁雷诺数为

$$R_m = \frac{UL}{\eta_m}$$





磁扩散效应

- 当 $R_m \ll 1$, 磁感应方程变成磁扩散方程

$$\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = \frac{\eta}{\mu_0} \nabla^2 \mathbf{B}$$

- 可得磁场渗透深度 L 所必须的电阻扩散时间（也叫磁扩散时间或磁场渗透的趋肤时间） τ_m 为

$$\tau_m = \frac{\mu_0 L^2}{\eta} = \mu_0 \sigma L^2$$

- 由于有电阻，磁力线可以相对于导电流体运动，磁场从磁场强度大的区域向磁场强度小的区域扩散，电阻率越大，磁场扩散得就越快，反之磁场扩散得就越慢。如果是 $\sigma = \infty$ 的理想导体，则磁场就不扩散。
- 对于有限电导率的流体，在 τ 时间内磁场渗透到介质里的趋肤深度为

$$\Delta l_m = \sqrt{\eta \tau / \mu_0} = \sqrt{\tau / \mu_0 \sigma}$$





磁冻结效应

- 当 $R_m \gg 1$, 磁感应方程变成冻结方程

$$\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = \nabla \times (\mathbf{u} \times \mathbf{B})$$

- 它在形式上和无粘滞不可压缩流体中涡旋 ω 满足的方程相同。后者的意义是涡旋粘附于流体质元上随其一起运动。
- 可见, 冻结方程的意义是磁场的变化如同磁力线粘附于流体质元上, 或磁力线被“冻结”在导电流体中一样。
- 物理解释: 当理想导电流体在磁场中运动时, 将引起感应电场 E' (设原来无电场), 既然流体电导率 $\sigma \rightarrow \infty$, 感应电场必须为零, 否则要导致无穷大的电流。由于 $E' = -\mathbf{v}' \times \mathbf{B}$ 而 $E' = 0$, 故有 $\mathbf{v}' \parallel \mathbf{B}$, 即导电流体相对于磁力线没有运动, 就像磁力线“冻结”在导电流体中一样。





目 录



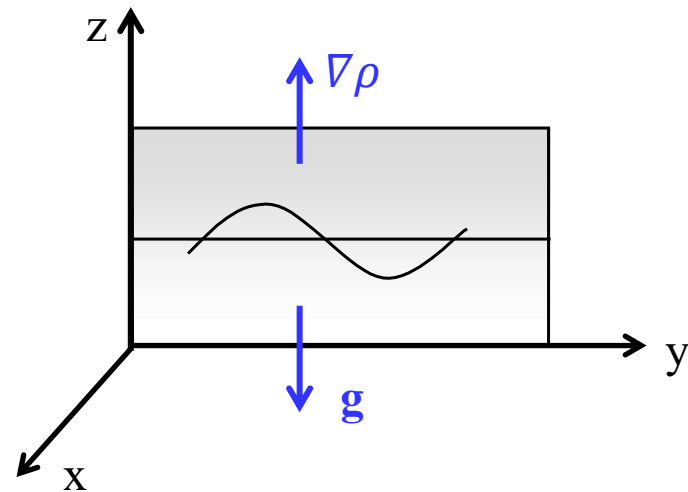
-
- 一、磁流体力学(MHD)理论简介
 - 二、简正模方法（利用微扰论求解）
 举例：Rayleigh-Taylor不稳定性
 - 三、简正模方法（利用边界层理论求解）
 举例：撕裂模不稳定性
 - 四、能量原理方法（利用变分原理）
 举例：直线箍缩等离子体柱的不稳定性
 - 五、结论与讨论





Rayleigh-Taylor不稳定性

- 流体中，当轻流体试图支撑其上的重流体以反抗重力时，系统势能处于较高位置，系统存在向势能最低的稳态发展的趋势。此时若有小扰动，交界面就会出现波纹，使得重流体向轻流体渗透，引起 Rayleigh-Taylor 不稳定性，如图所示。
- Taylor于1950年明确地指出这种不稳定性现象，早在1900年，Rayleigh也在某种程度上提及这个问题，因此这个不稳定性被称为 Rayleigh-Taylor (R-T) 不稳定性。
- 在磁约束等离子体和空间等离子体中，在重力无关紧要的情况下，若磁场梯度或磁场曲率产生的洛伦兹力充当等效重力，则也会产生R-T不稳定性。
- 在惯性约束等离子体中，由于靶丸中存在不同密度的层面，抑制R-T不稳定性十分重要。如果磁场产生的洛伦兹力与重力加速度的方向相反，则可能会降低甚至抑制R-T不稳定性。





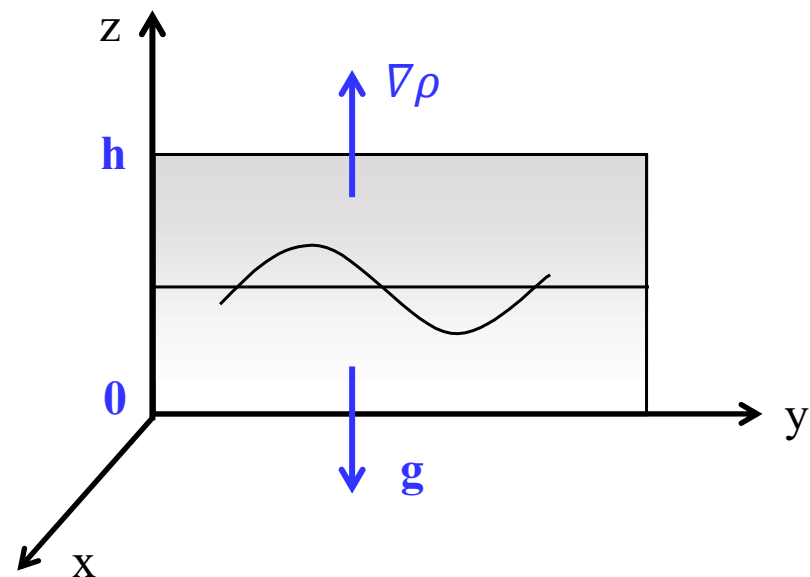
Rayleigh-Taylor不稳定性 (I)

● 物理模型I: 最简单的流体力学模型

- 假定等离子体是不可压缩的, 即 $\nabla \cdot \mathbf{u} = 0$, 且没有外加磁场, 即 $\mathbf{B}_0 = 0$, 则理想MHD方程组可以简化为

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla \rho = 0$$
$$\rho \left[\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} \right] = -\nabla p - \rho \mathbf{g}$$

- 为简化起见, 考虑等离子体仅在 z 方向不均匀, 等离子体密度梯度在 z 方向, 而重力场指向负 z 方向。 $z = 0, h$ 处为导体壁。
- 也不考虑平衡流, 即 $u_0 = 0$ 。





Rayleigh-Taylor不稳定性 (I)

- **微扰方法：** 设每一个变量均为平衡量和扰动量的叠加，即

$$f = f_0 + f_1 + f_2 + \cdots \quad (\varepsilon \sim f_1/f_0 \sim f_2/f_1 \ll 1)$$

- 代入MHD方程可得到关于各阶扰动的微分方程。

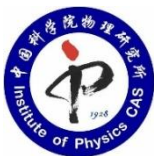
- 连续性方程

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho_0 + \rho_1 + \rho_2 + \cdots) + (\mathbf{u}_0 + \mathbf{u}_1 + \mathbf{u}_2 + \cdots) \cdot \nabla(\rho_0 + \rho_1 + \rho_2 + \cdots) = 0$$

$$\varepsilon^0: \quad \frac{\partial \rho_0}{\partial t} + \mathbf{u}_0 \cdot \nabla \rho_0 = 0$$

$$\varepsilon: \quad \frac{\partial \rho_1}{\partial t} + \mathbf{u}_1 \cdot \nabla \rho_0 = 0$$

$$\varepsilon^2: \quad \frac{\partial \rho_2}{\partial t} + \mathbf{u}_2 \cdot \nabla \rho_0 + \mathbf{u}_1 \cdot \nabla \rho_1 = 0$$





Rayleigh-Taylor不稳定性 (I)

● 运动方程

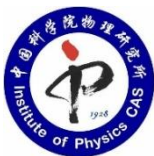
$$\begin{aligned} (\rho_0 + \rho_1 + \rho_2 + \cdots) \left[\frac{\partial}{\partial t} (\mathbf{u}_0 + \mathbf{u}_1 + \mathbf{u}_2 + \cdots) + [(\mathbf{u}_0 + \mathbf{u}_1 + \mathbf{u}_2 + \cdots) \cdot \nabla] (\mathbf{u}_0 + \mathbf{u}_1 + \mathbf{u}_2 + \cdots) \right] \\ = -\nabla(p_0 + p_1 + p_2 + \cdots) - (\rho_0 + \rho_1 + \rho_2 + \cdots) \mathbf{g} \end{aligned}$$

$$\varepsilon^0: \quad \frac{\partial \mathbf{u}_0}{\partial t} = -\nabla p_0 - \rho_0 \mathbf{g}$$

$$\varepsilon: \quad \frac{\partial \mathbf{u}_1}{\partial t} = -\nabla p_1 - \rho_1 \mathbf{g}$$

$$\varepsilon^2: \quad \rho_0 \frac{\partial \mathbf{u}_2}{\partial t} + \rho_1 \frac{\partial \mathbf{u}_1}{\partial t} + \rho_0 (\mathbf{u}_1 \cdot \nabla) \mathbf{u}_1 = -\nabla p_2 - \rho_2 \mathbf{g}$$

- **线性化：**就是略去二阶及以上的扰动量的过程，非线性项在此过程中被略去了。例如 $\rho_1 \partial \mathbf{u}_1 / \partial t$ 和 $\mathbf{u}_1 \cdot \nabla \rho_1$ 都是非线性项。





Rayleigh-Taylor不稳定性 (I)

- **简正模方法**，考察扰动形式为 $f_1(\mathbf{r}, t) = \tilde{f}(\mathbf{r}) \exp[i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t)]$ 的平面波解。因平面波是最简单最基本的一种波，任意形式的扰动可看成是平面波的迭加，线性方程可使用迭加原理。
- 对于现在讨论的流体模型，设扰动形式为 $f_1(y, z, t) = \tilde{f}(z) \exp[i(ky - \omega t)]$ ，则
$$\partial/\partial t \rightarrow -i\omega, \quad \nabla \rightarrow ik\mathbf{e}_y + (d/dz)\mathbf{e}_z$$
- 且有 $\mathbf{u}_1 = u_{1y}\mathbf{e}_y + u_{1z}\mathbf{e}_z$ ，则一阶扰动量方程组及不可压缩条件 $\nabla \cdot \mathbf{u}_1 = 0$ 变成

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial \rho_1}{\partial t} + \mathbf{u}_1 \cdot \nabla \rho_0 = 0 \\ \rho_0 \frac{\partial \mathbf{u}_1}{\partial t} = -\nabla p_1 - \rho_1 \mathbf{g} \\ \nabla \cdot \mathbf{u}_1 = 0 \end{array} \right. \quad \longrightarrow \quad \left\{ \begin{array}{l} -i\omega \tilde{\rho} + \frac{d\rho_0}{dz} \tilde{u}_z = 0 \\ i\omega \left[ik\rho_0 \tilde{u}_z - \frac{d}{dz}(\rho_0 \tilde{u}_y) \right] = ikg\tilde{\rho} \\ ik\tilde{u}_y + \frac{d\tilde{u}_z}{dz} = 0 \end{array} \right.$$





Rayleigh-Taylor不稳定性 (I)

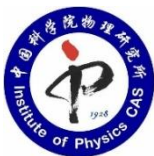
- 上页的运动方程 $i\omega[ik\rho_0\tilde{u}_z - d(\rho_0\tilde{u}_y)/dz] = ikg\tilde{\rho}$ 可以用两种方法导出:

1. 由运动方程的两个扰动分量式可得

$$\rho_0 \frac{\partial \mathbf{u}_1}{\partial t} = -\nabla p_1 - \rho_1 \mathbf{g} \quad \rightarrow \quad \begin{cases} -i\omega\rho_0\tilde{u}_y = -ik\tilde{p} \\ -i\omega\rho_0\tilde{u}_z = -\frac{d\tilde{p}}{dz} - g\tilde{\rho} \end{cases} \xrightarrow{\text{消去 } \tilde{p}} i\omega \left[ik\rho_0\tilde{u}_z - \frac{d}{dz}(\rho_0\tilde{u}_y) \right] = ikg\tilde{\rho}$$

- ## 2. R-T不稳定性主要是由密度梯度驱动的, 压强对其不作贡献, 所以运动方程中的压强项不起作用。利用算符 $\mathbf{e}_x \cdot \nabla \times$ 作用于运动方程, 由于 $\nabla \times \nabla p_1 = 0$, 方程变成

$$\mathbf{e}_x \cdot \nabla \times \left(\rho_0 \frac{\partial \mathbf{u}_1}{\partial t} \right) = -\mathbf{e}_x \cdot \nabla \times (\rho_1 \mathbf{g}) \quad \xrightarrow[\substack{\text{将 } \mathbf{u}_1 \text{ 和 } \rho_1 \text{ 代入} \\ \mathbf{e}_x \cdot \nabla \times \mathbf{A} = \partial A_z / \partial y - \partial A_y / \partial z}]{\text{}} i\omega \left[ik\rho_0\tilde{u}_z - \frac{d}{dz}(\rho_0\tilde{u}_y) \right] = ikg\tilde{\rho}$$





Rayleigh-Taylor不稳定性 (I)

- 合并一阶扰动方程组之后可得到关于 $\tilde{u}_z$ 的二阶微分方程:

$$\frac{d}{dz} \left(\rho_0 \frac{d\tilde{u}_z}{dz} \right) - k^2 \left(\rho_0 + \frac{g}{\omega^2} \frac{d\rho_0}{dz} \right) \tilde{u}_z = 0$$

- 此方程对于任意密度分布 $\rho_0(z)$ 难找到解析解。若取密度分布 $\rho_0(z) = \rho_0(0) \exp(z/L)$, 其中 $L = \rho_0/\rho_0'$ 代表密度梯度标长, 则此方程简化成常系数的微分方程:

$$\frac{d^2 \tilde{u}_z}{dz^2} + \frac{1}{L} \frac{d\tilde{u}_z}{dz} - k^2 \left(1 + \frac{g}{L\omega^2} \right) \tilde{u}_z = 0$$

- 其特征方程为

$$r^2 + \frac{1}{L} r - k^2 \left(1 + \frac{g}{L\omega^2} \right) = 0$$

- 特征根为

$$r = \alpha \pm i\beta, \quad \alpha = -\frac{1}{2L}, \quad \beta = \mp i \frac{\sqrt{1 + 4k^2 L^2 (1 + g/L\omega^2)}}{2L}$$





Rayleigh-Taylor不稳定性 (I)

- 方程的解为

$$\tilde{u}_z = e^{\alpha z} (C_1 \cos \beta z + C_2 \sin \beta z)$$

- 利用固定边条件 $\tilde{u}_z(0) = 0$, 即 $\tilde{u}_z(0) = C_1 \times 1 + C_2 \times 0 = 0$, 可得

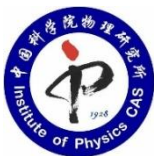
$$C_1 = 0 \quad \Rightarrow \quad \tilde{u}_z(z) = C_2 e^{\alpha z} \sin \beta z$$

- 利用固定边条件 $\tilde{u}_z(h) = 0$, 即 $\tilde{u}_z(h) = C_2 e^{\alpha h} \sin \beta h = 0$, 可得

$$\beta = \frac{n\pi}{h}$$

- 将 β 的表达式代入 $\beta^2 = (n\pi/h)^2$, 可得相应的本征值所应满足的关系式

$$k^2 \left(1 + \frac{g}{L\omega^2} \right) = -\frac{1}{4L^2} - \left(\frac{n\pi}{h} \right)^2$$





Rayleigh-Taylor不稳定性 (I)

- 令 $\omega = i\gamma$, 从上式可导出 R-T 不稳定性增长率为

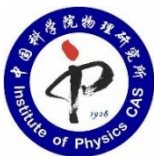
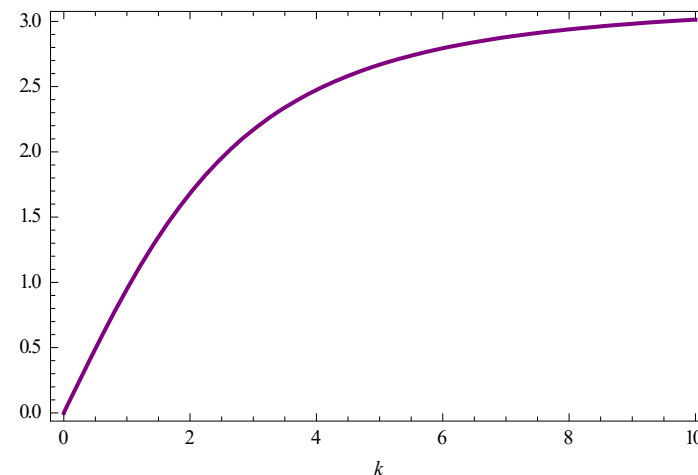
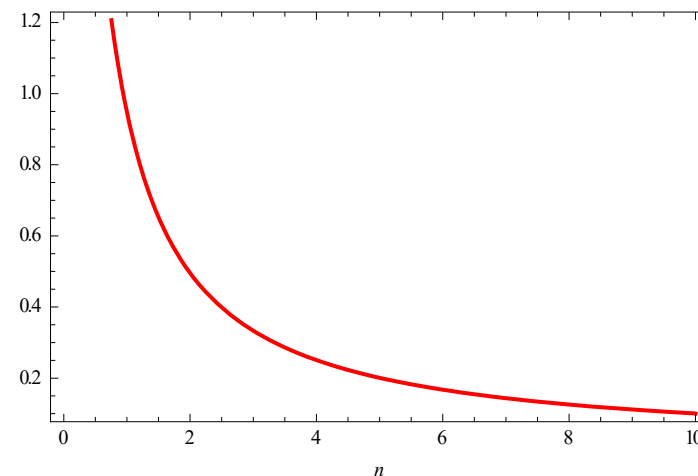
$$\gamma = \frac{2hk\sqrt{gL}}{\sqrt{4L^2(h^2k^2 + n^2\pi^2) + h^2}}$$

- 当 k 一定时, 与其它 $n > 1$ 的模相比, $n = 1$ 的模增长率最大

$$\frac{\partial \gamma}{\partial n} = -\frac{8\pi^2 hkL^2 \sqrt{gL} n}{[4L^2(h^2k^2 + n^2\pi^2) + h^2]^{\frac{3}{2}}} < 0$$

- 说明当 k 增大, 即波长变短时, 增长率增大, 因此波长最短的模增长率最大

$$\frac{\partial \gamma}{\partial k} = \frac{2h\sqrt{gL}(4L^2n^2\pi^2 + h^2)}{[4L^2(h^2k^2 + n^2\pi^2) + h^2]^{\frac{3}{2}}} > 0$$





Rayleigh-Taylor不稳定性 (I)

- 对于波长在 y 方向的所有模，当波长同时远小于密度梯度标长 L 和等离子体的几何高度 h 时，即 $hk \gg \pi$ 和 $kL \gg 1$ 时，增长率变成

$$\gamma = \frac{2hk\sqrt{gL}}{\sqrt{4L^2(h^2k^2 + n^2\pi^2) + h^2}}$$

 $\gamma = (g/L)^{1/2}$

- 其对应的时间尺度 $\gamma^{-1} = (L/g)^{1/2}$ 正好为自由落体下降高度为 L 的时间。
- 假如密度标长或重力加速度其中之一的方向反过来，即等离子体密度增长与重力同向，则 ω 的解是实的。这种情况下本征模是稳定的，只是像扰动波在传播。
- 在磁约束等离子体中，磁力线弯曲可看作等效重力的作用。在磁约束等离子体的边界上，若磁力线处处凹向等离子体，则平衡位形是不稳定的，反之，若磁力线处处凸向等离子体，则是稳定的，后者称之为磁阱。





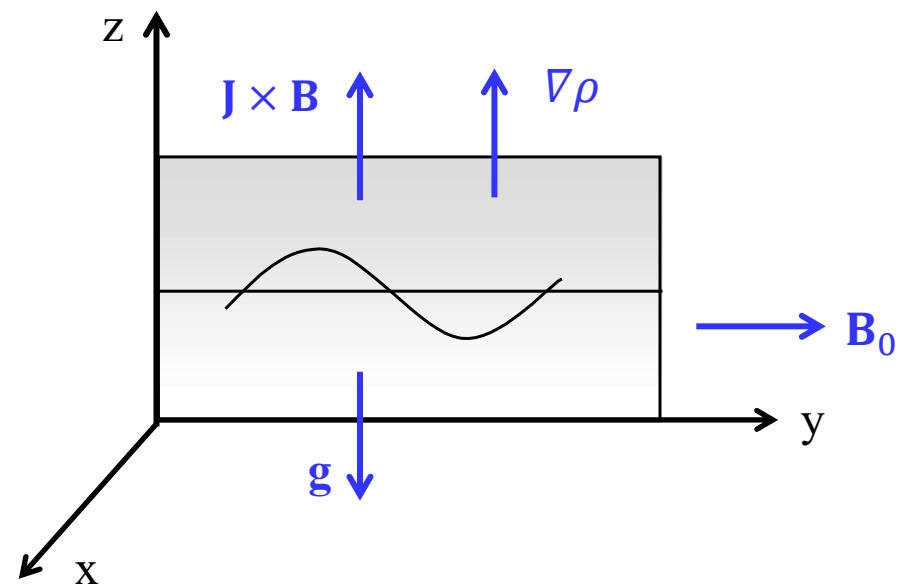
Rayleigh-Taylor不稳定性 (II)

● 物理模型II：考虑磁场的MHD模型

- 有平衡磁场时，根据欧姆定律和法拉第电磁感应定律，流体扰动会产生扰动电场，感生出扰动磁场，从而导致扰动电流。扰动电流与平衡磁场形成的洛伦兹力若指向 z 方向，则会减弱甚至完全抑制R-T不稳定性的增长。

- 仍假定 $\nabla\rho$ 在 z 方向， $g = -ge_z$ ， $u_0 = 0$ ， $z = 0, h$ 处为导体壁。但有外加磁场 $B_0 = B_{0y}(z)e_y$ ，则理想MHD方程组可简化为

$$\begin{aligned}\frac{\partial \rho}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla \rho &= 0 \\ \rho \left[\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} \right] &= -\nabla p - \rho \mathbf{g} + \frac{1}{\mu_0} (\nabla \times \mathbf{B}) \times \mathbf{B} \\ \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} &= \nabla \times (\mathbf{u} \times \mathbf{B}), \quad \nabla \cdot \mathbf{B} = 0\end{aligned}$$



Wu, Zhang, Li, & Yang, CPL 21(10), 2004





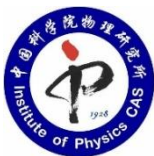
Rayleigh-Taylor不稳定性 (II)

- 一阶扰动量的微分方程组变成

$$\begin{aligned}\frac{\partial \rho_1}{\partial t} + \mathbf{u}_1 \cdot \nabla \rho_0 &= 0 \\ \rho_0 \frac{\partial \mathbf{u}_1}{\partial t} &= -\nabla \left(p + \frac{B_0 B_1}{\mu_0} \right) + \frac{1}{\mu_0} (\mathbf{B}_0 \cdot \nabla) \mathbf{B}_1 + \frac{1}{\mu_0} (\mathbf{B}_1 \cdot \nabla) \mathbf{B}_0 - \rho_1 \mathbf{g} \\ \nabla \cdot \mathbf{u}_1 &= 0 \\ \frac{\partial \mathbf{B}_1}{\partial t} &= \nabla \times (\mathbf{u}_1 \times \mathbf{B}_0)\end{aligned}$$

- 当磁场为零时，方程组退回到物理模型I的情形

$$\begin{aligned}\frac{\partial \rho_1}{\partial t} + \mathbf{u}_1 \cdot \nabla \rho_0 &= 0 \\ \rho_0 \frac{\partial \mathbf{u}_1}{\partial t} &= -\nabla p - \rho_1 \mathbf{g} \\ \nabla \cdot \mathbf{u}_1 &= 0\end{aligned}$$





Rayleigh-Taylor不稳定性 (II)

- 仍设扰动形式为 $f_1(y, z, t) = \tilde{f}(z) \exp[i(ky - \omega t)]$, 则一阶扰动量方程组变成

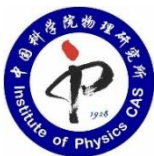
$$-i\omega\tilde{\rho} + \frac{d\rho_0}{dz}\tilde{u}_z = 0$$

$$-i\omega \left[ik\rho_0\tilde{u}_z - \frac{d(\rho_0\tilde{u}_y)}{dz} \right] = -ikg\tilde{\rho} - \frac{1}{\mu_0} \left[k^2 B_{0y}\tilde{B}_z + ik \frac{d(B_{0y}\tilde{B}_y)}{dz} + \frac{d}{dz} \left(\frac{dB_{0y}}{dz} \tilde{B}_z \right) \right]$$

$$ik\tilde{u}_y + \frac{d\tilde{u}_z}{dz} = 0$$

$$-i\omega\tilde{B}_y = ikB_{0y}\tilde{u}_y - \frac{dB_{0y}}{dz}\tilde{u}_z$$

$$-\omega\tilde{B}_z = kB_{0y}\tilde{u}_z$$





Rayleigh-Taylor不稳定性 (II)

- 从上述方程组消去 $\tilde{\rho}$, $\tilde{u}_y$, $\tilde{B}_y$ 和 $\tilde{B}_z$, 可得

$$\frac{d}{dz} \left(\rho_0 \frac{d\tilde{u}_z}{dz} \right) - k^2 \left(\rho_0 + \frac{g}{\omega^2} \frac{d\rho_0}{dz} \right) \tilde{u}_z = -\frac{k^2}{\mu_0 \omega^2} \left[k^2 B_{0y}^2 \tilde{u}_z - \frac{d}{dz} \left(B_{0y}^2 \frac{d\tilde{u}_z}{dz} \right) \right]$$

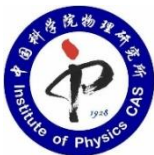
- 当平衡磁场 $B_{0y} = 0$ 时, 此方程退回到物理模型 I 的情形。

- 若设 $\rho_0(z) = \rho_0(0) \exp(z/L)$ 和 $B_{0y}(z) = B_{0y}(0) \exp(z/2L)$, 则方程简化成

$$\left(1 - \frac{k^2 u_A^2}{\omega^2} \right) \left(\frac{d^2 \tilde{u}_z}{dz^2} + \frac{1}{L} \frac{d\tilde{u}_z}{dz} - k^2 \tilde{u}_z \right) - \frac{k^2 g}{L \omega^2} \tilde{u}_z = 0$$

- 此处 $u_A^2 = B_{0y}^2(0)/\mu_0 \rho_0(0)$ 为阿尔芬速度。类似地, 可得到满足边界条件 $\tilde{u}_z(0) = \tilde{u}_z(h) = 0$ 的同样的本征解

$$\tilde{u}_z(z) = \sin\left(\frac{n\pi z}{h}\right) \exp\left(-\frac{z}{2L}\right)$$





Rayleigh-Taylor不稳定性 (II)

- 但本征值所满足的关系式变成

$$\frac{k^2 g}{L \omega^2} = - \left(1 - \frac{k^2 u_A^2}{\omega^2} \right) \left[\frac{1}{4L^2} + \left(\frac{n\pi}{h} \right)^2 + k^2 \right]$$

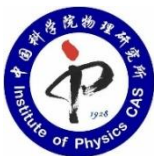
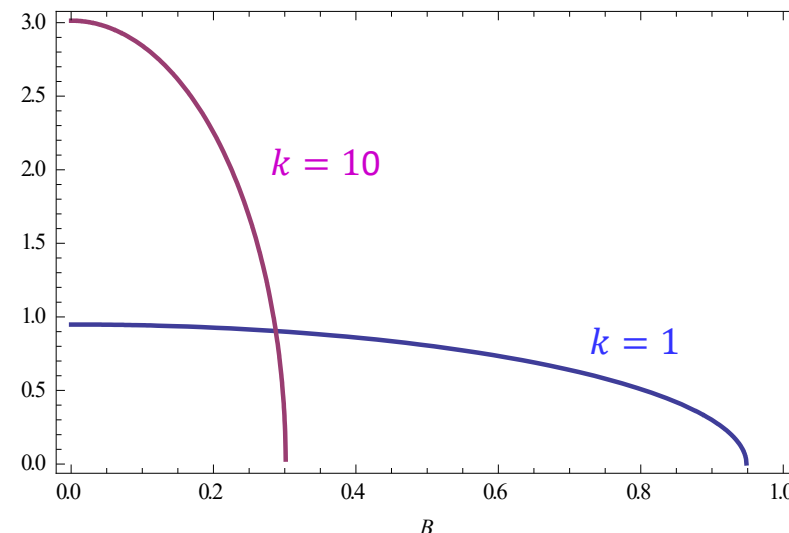
- 相应地， Rayleigh-Taylor不稳定性增长率变成

$$\gamma = k \left[\frac{4h^2 g L}{4L^2(h^2 k^2 + n^2 \pi^2) + h^2} - u_A^2 \right]^{1/2}$$

- 显然，与界面平行的磁场起着增稳作用，对短波的抑制作用更加明显。当磁场达到一定的强度，例如

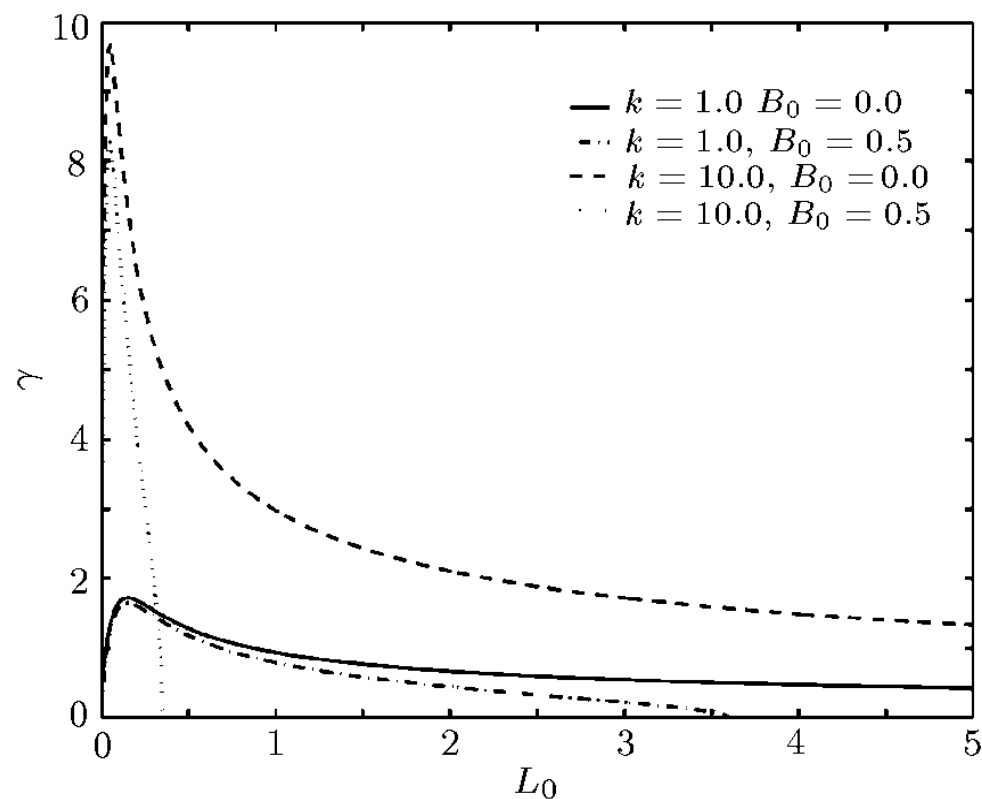
$$u_A^2 \geq \frac{4h^2 g L}{4L^2(h^2 k^2 + n^2 \pi^2) + h^2}$$

时， R-T 不稳定性的增长可以被完全抑制。

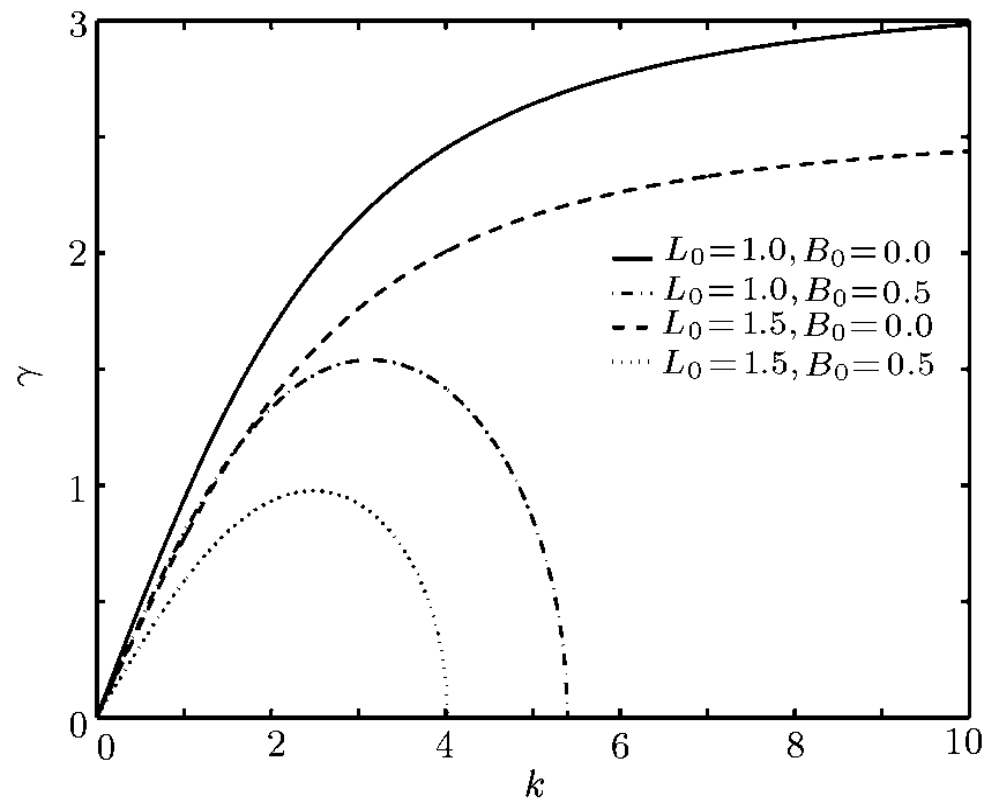




Rayleigh-Taylor不稳定性 (II)

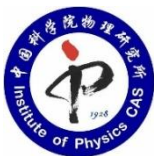


增长率随着密度梯度标长的变化趋势。



增长率随着扰动波数的变化趋势。

Wu, Zhang, Li, & Yang, CPL 21(10), 2004

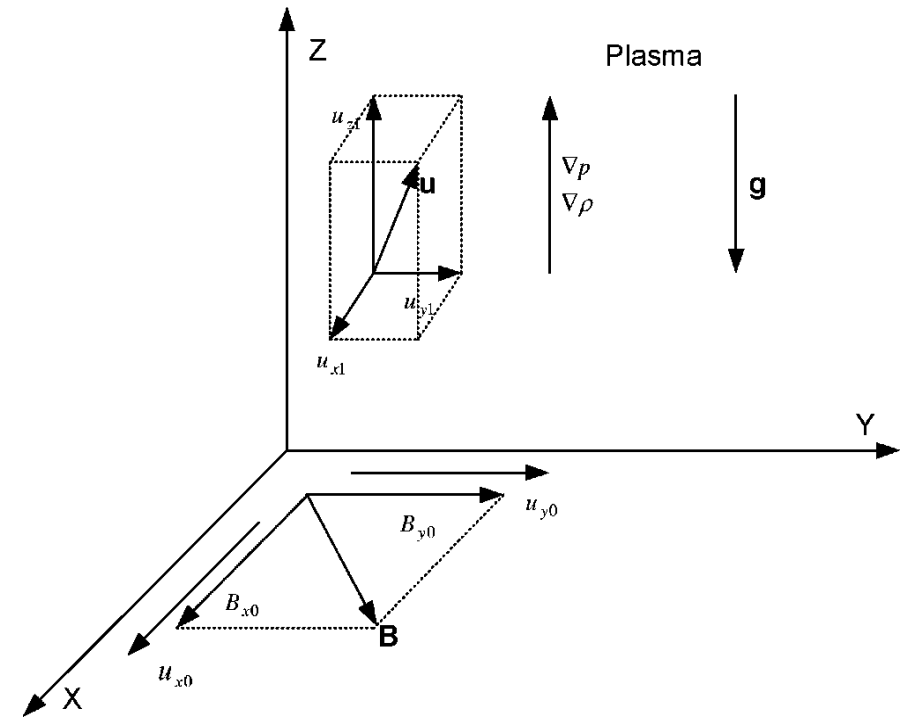




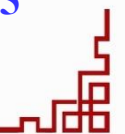
Rayleigh-Taylor不稳定性 (III)

● 物理模型III：考虑剪切流和剪切磁场的MHD模型

- 描述方程：理想MHD方程组
- 剪切磁场： $\mathbf{B}_0 = B_{0y}(z)\mathbf{e}_y + B_{0z}(z)\mathbf{e}_z$
- 剪切平衡流： $\mathbf{u}_0 = u_{0y}(z)\mathbf{e}_y + u_{0z}(z)\mathbf{e}_z$
- 扰动速度： $\mathbf{u}_1 = u_{1y}\mathbf{e}_y + u_{1z}\mathbf{e}_z$
- 扰动形式： $f_1(y, z, t) = \tilde{f}(z) \exp[i(ky - \omega t)]$
- 边界条件： $\tilde{u}_z(0) = \tilde{u}_z(h) = 0$
- 附加条件： $\nabla \cdot \mathbf{B}_0 = \nabla \cdot \mathbf{B}_1 = \nabla \cdot \mathbf{u}_0 = \nabla \cdot \mathbf{u}_1 = 0$



Zhang, Wu, & Li, PoP 12, 042106, 2005





Rayleigh-Taylor不稳定性 (III)

- 类似地，可以导出扰动速度满足的微分方程

$$\frac{d}{dz} \left\{ \left[\rho_0 (\omega - k u_{0y})^2 - \frac{k^2}{\mu_0} B_{0y}^2 \right] \frac{d}{dz} \left(\frac{\tilde{u}_z}{\omega - k u_{0y}} \right) \right\} = k^2 \left\{ \left[\rho_0 (\omega - k u_{0y})^2 - \frac{k^2}{\mu_0} B_{0y}^2 \right] + \frac{d\rho_0}{dz} g \right\} \left(\frac{\tilde{u}_z}{\omega - k u_{0y}} \right)$$

- 若 $u_{0y} = 0$ ，则退回到物理模型 II 描述的情形。若 $u_{0y} = B_{0y} = 0$ ，则退回到物理模型 I 描述的情形。
- 对于一般情形解析求解很困难，此时可以分别讨论各种特殊情形。
- 现在讨论一种最简单的平衡流($u_{0y} = \text{const.}$)的情形，若设 $\rho_0(z) = \rho_0(0) \exp(z/L)$ 和 $B_{0y}(z) = B_{0y}(0) \exp(z/2L)$ ，则方程简化成

$$\left[1 - \frac{k^2 u_A^2}{(\omega - k u_{0y})^2} \right] \left(\frac{d^2 \tilde{u}_z}{dz^2} + \frac{1}{L} \frac{d\tilde{u}_z}{dz} - k^2 \tilde{u}_z \right) - \frac{k^2 g}{L(\omega - k u_{0y})^2} \tilde{u}_z = 0$$





Rayleigh-Taylor不稳定性 (III)

- 类似地，可得到满足边界条件 $\tilde{u}_z(0) = \tilde{u}_z(h) = 0$ 的同样的本征解

$$\tilde{u}_z(z) = \sin\left(\frac{n\pi z}{h}\right) \exp\left(-\frac{z}{2L}\right)$$

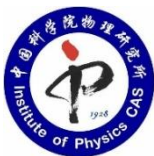
- 本征值所满足的关系式变成

$$\frac{k^2 g}{L(\omega - ku_{y0})^2} = - \left[1 - \frac{k^2 u_A^2}{(\omega - ku_{y0})^2} \right] \left[\frac{1}{4L^2} + \left(\frac{n\pi}{h}\right)^2 + k^2 \right]$$

- 令 $\omega = \omega_r + i\gamma$ ，则可得

$$\omega_r = ku_{0y}, \quad \gamma = k \left[\frac{4h^2 g L}{4L^2(h^2 k^2 + n^2 \pi^2) + h^2} - u_A^2 \right]^{1/2}$$

- 此时平衡流仅产生多普勒频移，磁场则起增稳作用。





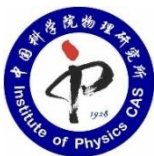
Rayleigh-Taylor不稳定性 (III)

- 对于平衡磁场为零，剪切流为 $u_{0y}(z) = u_{0y0} + u'_{0y0}z$ 的情形，可得色散关系为

$$\omega_r = ku_{0y0} + \frac{ku'_{0y0}L}{4[4L^2(h^2k^2 + n^2\pi^2) + h^2]}$$

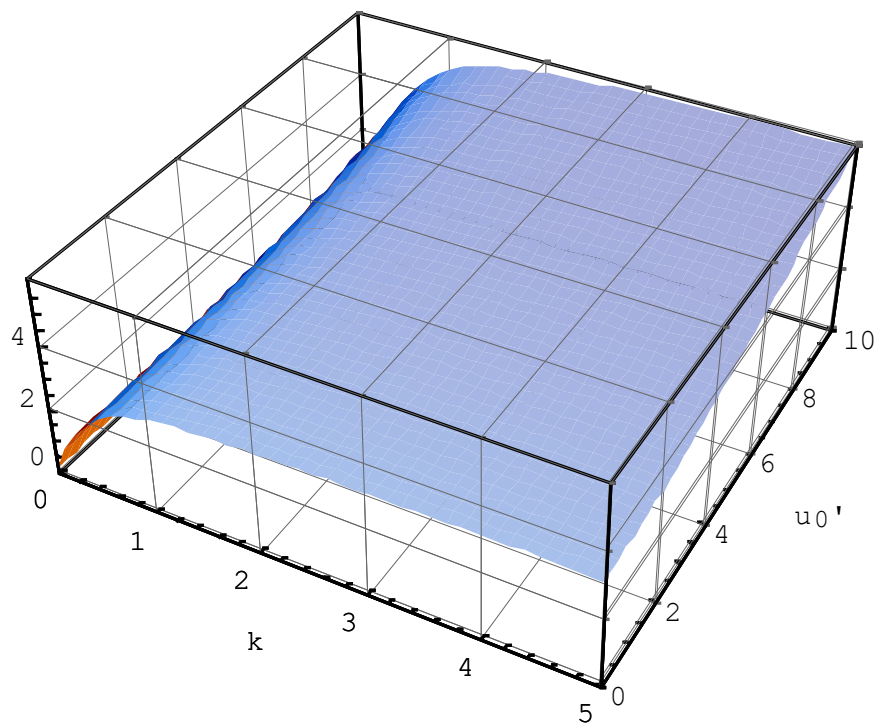
$$\gamma = \frac{2hkL \sqrt{(g/L)[4L^2(h^2k^2 + n^2\pi^2) + h^2] + (u'_{0y0}L)^2(h^2k^2 + n^2\pi^2)}}{4L^2(h^2k^2 + n^2\pi^2) + h^2}$$

- 若 $u'_{0y0} > 0$ ，扰动的多普勒频移随着剪切流的增加而增大，若 $u'_{0y0} < 0$ ，则多普勒频移随着剪切流绝对值的增加而减小。
- 增长率仅与剪切流的平方相关，随着剪切流的增加而增大。这有点类似于激发了 Kelvin-Helmholtz 不稳定性。

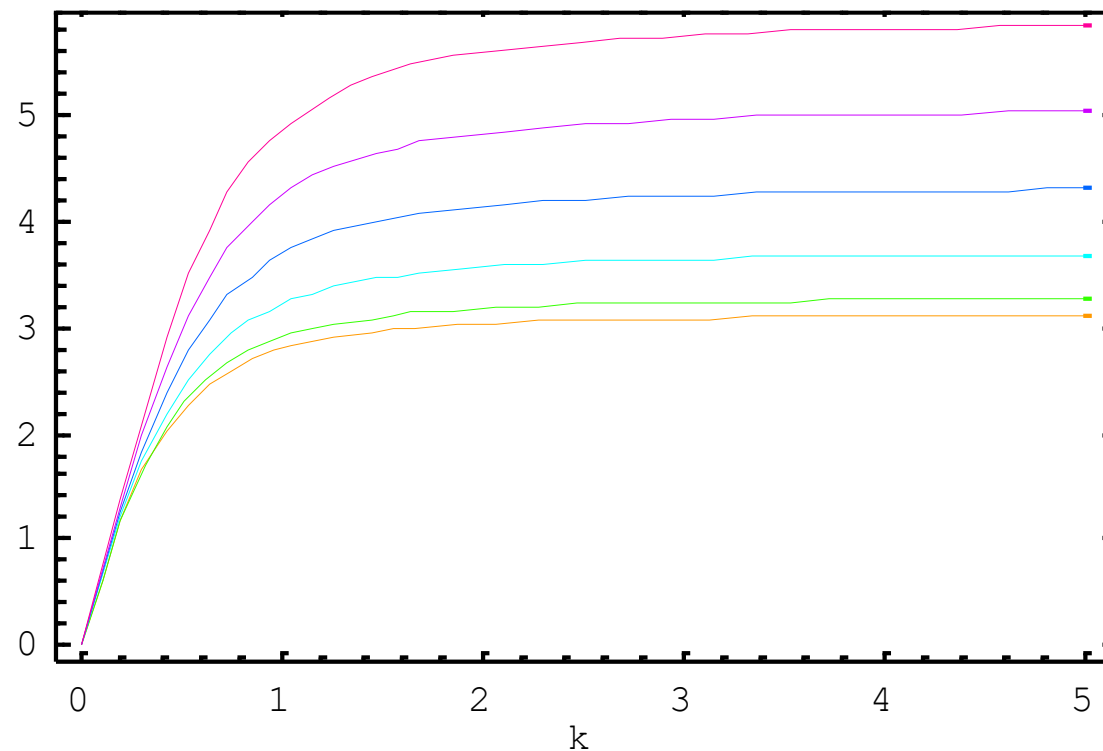




Rayleigh-Taylor不稳定性 (III)



增长率随剪切流和波数的变化



增长率随剪切流的增加而增大

$g = 9.8, n = 0, L = 1, u'_{0y0} = 0, 2, 4, 6, 8, 10$

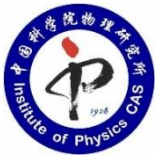




目 录



-
- 一、磁流体力学(MHD)理论简介
 - 二、简正模方法（利用微扰论求解）
 举例：Rayleigh-Taylor不稳定性
 - 三、简正模方法（利用边界层理论求解）
 举例：撕裂模不稳定性
 - 四、能量原理方法（利用变分原理）
 举例：直线箍缩等离子体柱的不稳定性
 - 五、结论与讨论





撕裂模不稳定性

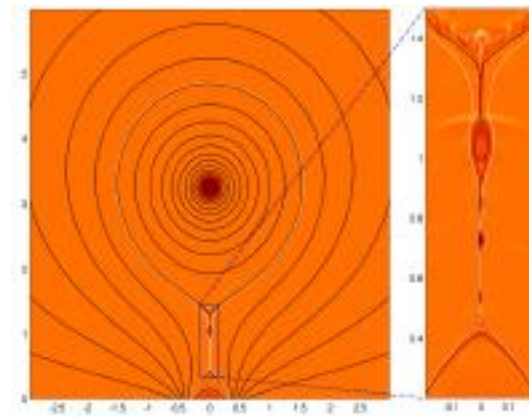
- 撕裂模不稳定性 (tearing instability) 产生于有限等离子体电阻效应。
- 在理想情况下，等离子体被冻结在磁面上，当磁场从非均匀趋向于均匀时，蕴藏在特定磁场位形下的磁场的自由能就会释放出来，驱动出扭曲不稳定性，使得等离子体系统趋向于磁能较低的状态。
- 等离子体中有电阻耗散时，磁力线可断开和重联而形成所谓磁岛，等离子体系统可达到的磁能有可能比理想状况下更低。所以，当扭曲不稳定性被抑制之后，磁场的自由能仍有可能驱动出电阻撕裂模不稳定性。从这个意义上，可以说撕裂模不稳定性是扭曲不稳定性在非理想状况下的翻版。
- 撕裂模是等离子体物理和磁约束核聚变中最重要的MHD不稳定性之一。托卡马克放电的整个过程与撕裂模密切相关。撕裂模引起的磁场重联不仅影响实验室等离子体的约束和运输，而且在天体物理学和相关领域中起重要作用。因此，研究撕裂模的线性增长和非线性演化有重要的物理意义。





磁场重联：挖掘磁场能量

- 磁场重联是等离子体物理学中的一个基本过程，值得对其本身加以理解，且具有非常实际的意义，对于我们控制热核等离子体以产生聚变能和预测太空天气的能力至关重要。例如，
 - 在托卡马克等磁约束装置中，由于磁场重联的不稳定因素之间的非线性相互作用，可能会造成重大破坏，需要对其进行控制和缓解。
 - 人们认为，产生风暴和亚暴的极端太空天气事件至少部分是通过磁场重联来提供动力的。这些事件可能会破坏或损坏电网，可能会对通信网络造成重大干扰，损坏航天器，并对宇航员构成危险。



对日冕物质抛射（CME）标准模型的高分辨率MHD模拟，其中大量物质从太阳中逸出。自发形成薄电流片的不稳定性，显示了等离子体的形成、重联流出、喷射，直到电流片破裂，释放出较大的气球状瓣。

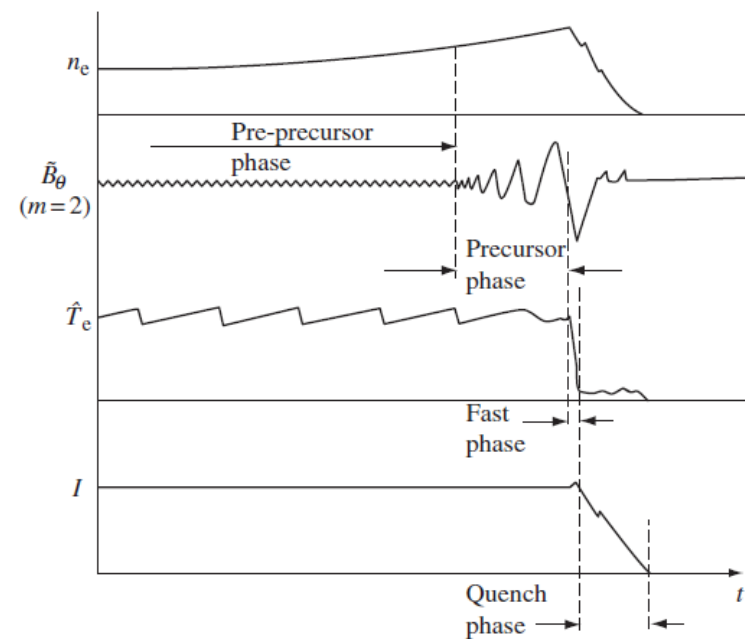
——Plasma Sciences, 2020, NAP





破裂不稳定性

- 托卡马克中的大破裂是等离子体电流突然结束且失去约束的突发事件，是最危险的宏观不稳定性之一。
- 预前兆阶段：基本状态改变，等离子体电流或密度增大。
- 前兆阶段：等离子体内磁扰动开始增长，典型时间为10ms量级；
- 快阶段：约束恶化和中心温度坍塌，典型时间为1ms量级，电流剖面变平，引起环电压负尖峰，典型值为正常电压的10~100倍；
- 熄灭阶段：等离子体电流衰减到零，速率大于100MA/s。



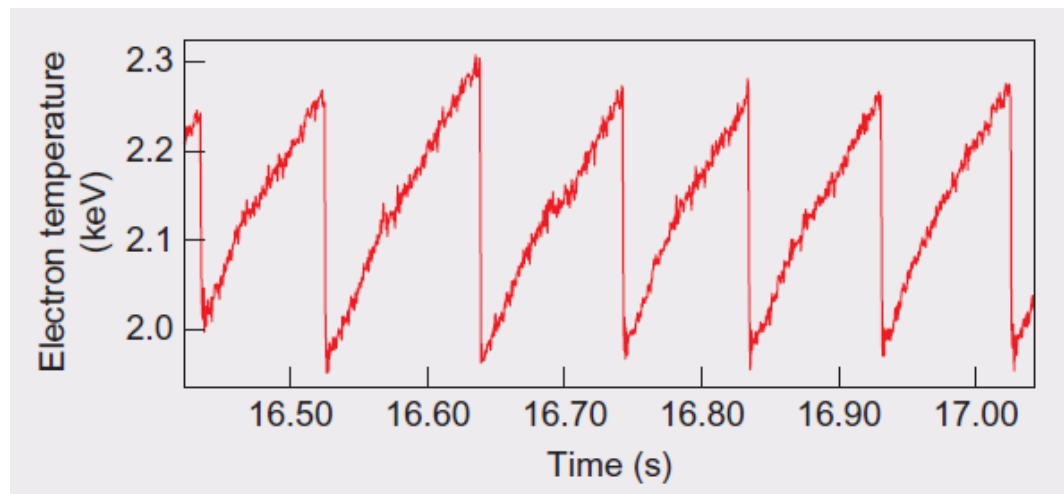
——J. Wesson, 《Tokamak》





锯齿振荡

- 托卡马克等离子体芯部温度常常周期性的变化。线性增长至一个峰值，快速下降，然后重新上升，故得名锯齿振荡。当芯部温度下降时，温度分布变平，外部的温度则上升，表明等离子体能量突然向外输运。
- Kadomtsev提出的不完全磁场重联模型能够成功地解释锯齿行为，后来大装置实验发现许多细节不相符，至今没有一个普遍接受的理想模型。



——J. Wesson, 《Tokamak》





Mirnov不稳定性

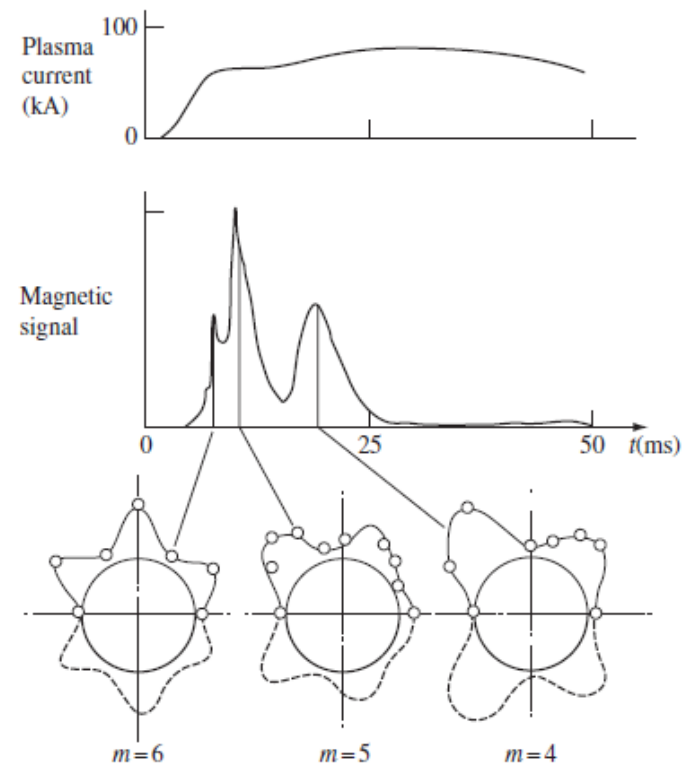
- 在电流上升期间观测到磁涨落及其空间结构如图所示。模数的减小值 m 与等离子表面处的 q 的减小值相关。

- q 称为安全因子，定义为

$$q = \frac{aB_\phi}{RB_\theta} = \frac{2\pi a^2 B_\phi}{\mu_0 R I}$$

此处利用了 $I = 2\pi a B_\theta / \mu_0$ 。

- 随着电流增加，等离子体表面将出现负电流梯度。在这段时间内， q 面朝着等离子体边缘向外移动，随着共振面满足不稳定电流梯度，预计会发生 $m \approx q_a$ 的撕裂模不稳定性。



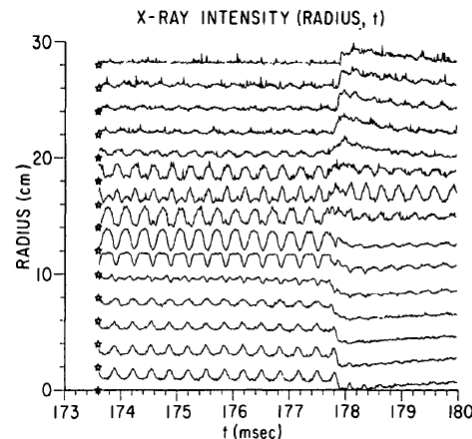
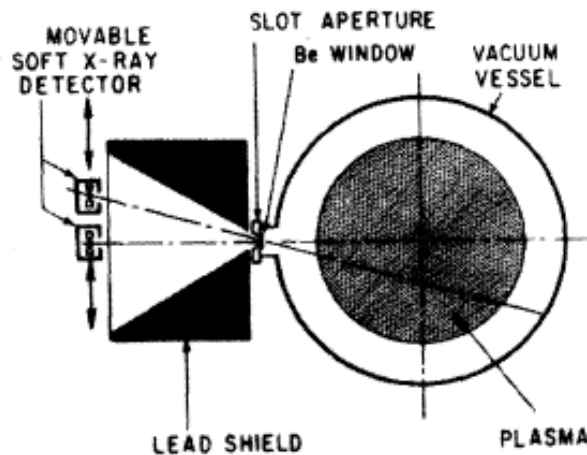
Mirnov & Semenov, Soviet Atomic Energy 30, 22 (1971).





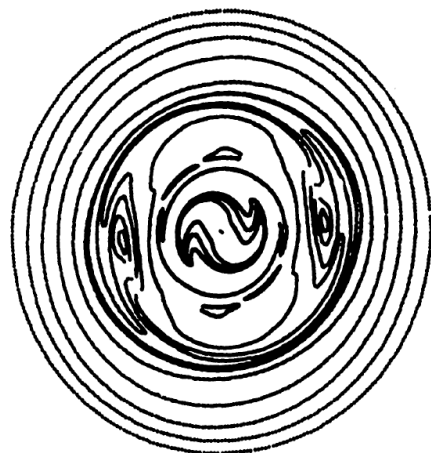
撕裂模不稳定性

ST托卡马克
X射线成像系统

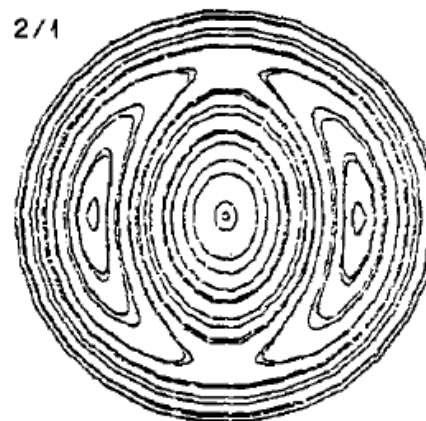


15个径向线积分发
射率, $m = 2$ 前兆
振荡和 $q = 2$ 破裂

$m = 2$ 模的X射线
辐射率等高线



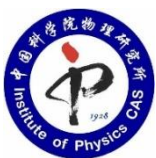
2/1



$m/n = 2/1$ 模
磁通等高线。

——Sauthoff, 1978, NF

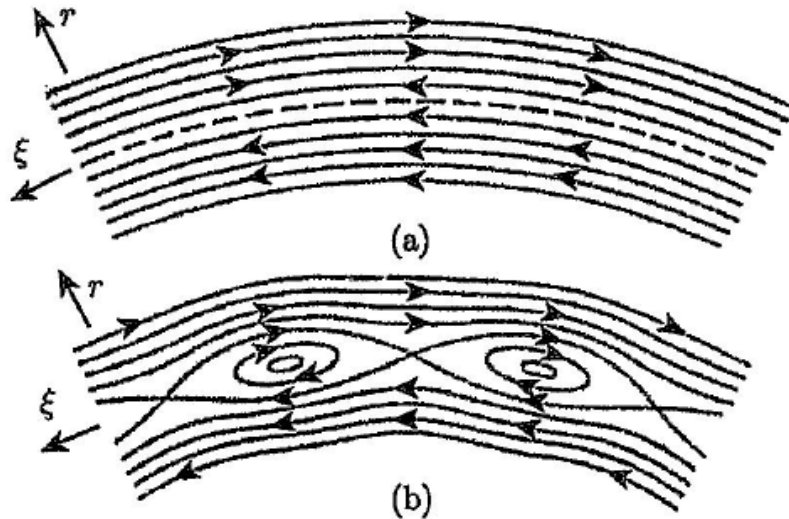
——Waddell, 1979, PF



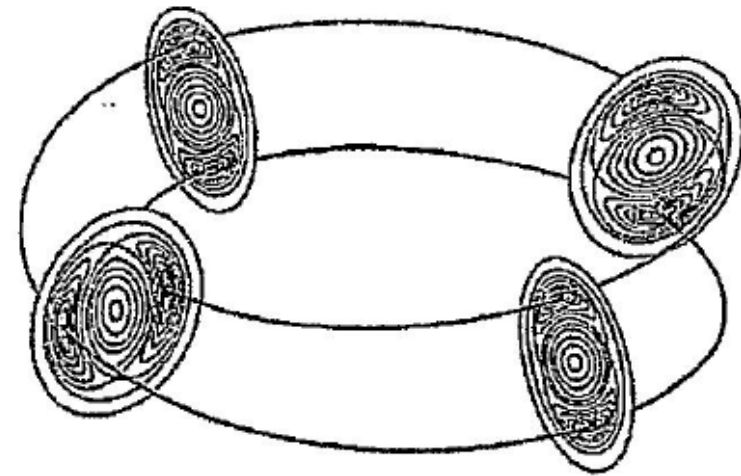


撕裂模的磁岛

- 理想磁流体中，因为没有电阻，等离子体冻结在磁力线上。存在电阻时，可在电阻扩散时间尺度上改变磁场拓扑。这样的扰动和磁场重联并形成磁岛只能发生在共振面附近。



磁面结构和磁岛形成



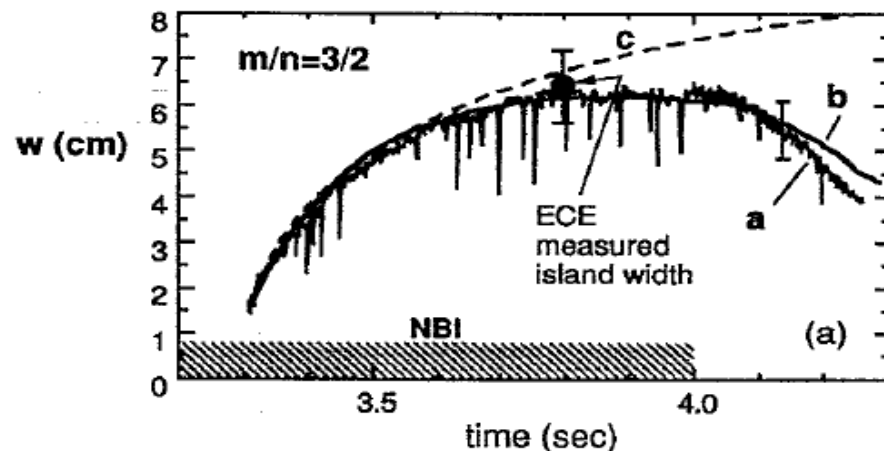
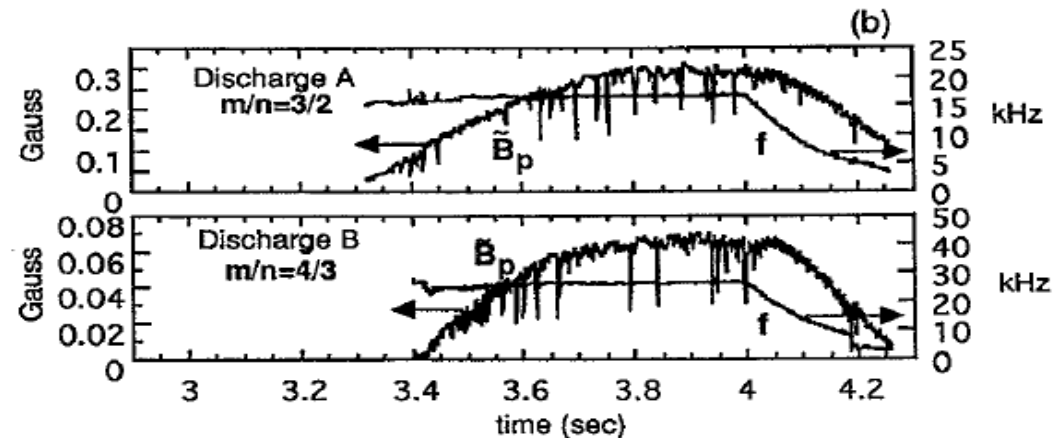
$m/n = 2/1$ 模的磁岛结构





新经典撕裂模

- 新经典撕裂模与自举电流有关。当撕裂模稳定时，有理面附近的平衡电流梯度变缓，此时若自举电流增大，会使得总体电流梯度变陡，撕裂模再次变得不稳定，而自举电流来源于新经典效应。
- 1985年由W. X. Xu和J. D. Callen理论预言。
- 1995年由Z. Y. Chang等人在TFTR实验上发现。



——1995, Chang et. Al, PRL





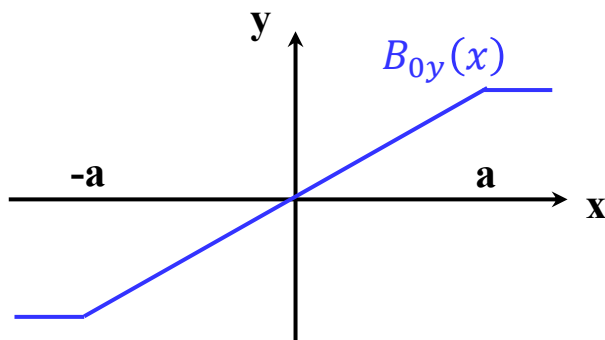
撕裂模不稳定性

● 平板模型：假设平衡磁场为

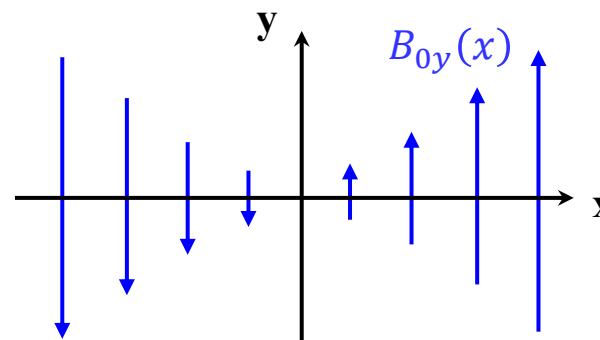
$$\mathbf{B}_0 = B_{0y}(x)\mathbf{e}_y + B_{0z}\mathbf{e}_z$$

其中 B_{0z} 为常数，而 $B_{0y}(x)$ 为剪切场，如图所示。最简单的剪切场可取成为线性函数：

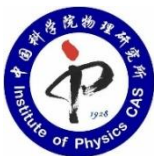
$$B_{0y}(x) = \begin{cases} B'_{y0}x & -a < x < a \\ -B'_{y0}a & x < -a \\ B'_{y0}a & x > a \end{cases}$$



剪切磁场示意图



剪切场磁力线分布

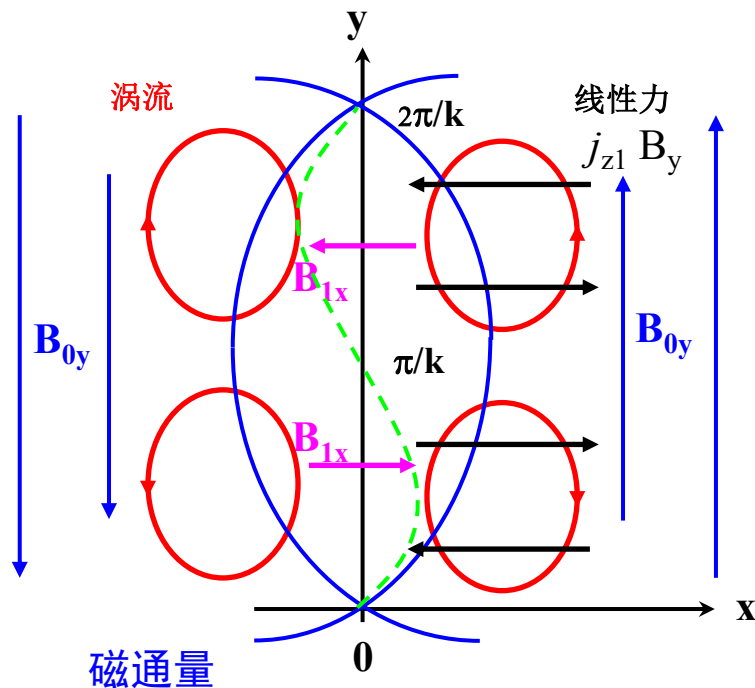




线性撕裂模不稳定性

- 1963年, Furth, Killeen和Rosenbluth采用平板模型分析了线性撕裂模。(Phys. Fluid, 1963)

- 设等离子体沿 z 方向均匀, 若有扰动磁场 $B_{1x} \sim \sin ky \exp(\gamma t)$ 。由 Faraday 定律 $\partial B_{1x}/\partial t = -\partial E_{1z}/\partial y$ 可感应出扰动电场 $E_{1x} \sim (\gamma/k)\cos ky \times \exp(\gamma t)$ 。根据欧姆定律 $E_{1x} = -u_{1x}B_{0y} + \eta J_{1z}$, 可产生扰动电流 $J_{1z} \sim (\gamma/k\eta)\cos ky \exp(\gamma t)$ 并感应出扰动流 $u_{1x} \sim -(\gamma/kB_{0y})\cos ky \exp(\gamma t)$ 。因流体的不可压缩性, u_{1x} 会导致 $u_{1y} \sim \sin ky \times \exp(\gamma t)$ 从而形成涡流。



- 扰动电流 J_{1z} 和平衡磁场 $B_{0y}(x)$ 产生的 Lorentz 力 $F_{1x} \sim -J_{1z}B_{0y} \sim -(\gamma B_{0y}/k\eta) \times \cos ky \exp(\gamma t)$ 在 π/k 处向外拉, 在 0 和 $2\pi/k$ 处向内挤, 使得 B_{1x} 和 $B_{0y}(x)$ 在一起构成了磁岛结构。同时, Lorentz 力产生的力矩还加速涡流。





线性撕裂模不稳定性

- 利用安培定律和欧姆定律，可从法拉第电磁感应定律得到

$$\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = \nabla \times (\mathbf{u} \times \mathbf{B}) + \frac{\eta}{\mu_0} \nabla^2 \mathbf{B}$$

- 若只有磁冻结效应，则系统相应的时间尺度为阿尔芬时间 τ_A ，故理想模的不稳定性增长率（ $\sim \tau_A^{-1}$ ）很快；若只有磁扩散效应，则系统相应的时间尺度为电阻扩散时间 τ_R ，但撕裂模不稳定性取决于磁冻结和磁扩散的协同效应，其时间尺度介于阿尔芬时间和电阻扩散时间之间，故增长率应该为 $\tau_A^{-\alpha} \tau_R^{\alpha-1}$ 的量级。
- 将算符 $\mathbf{e}_z \cdot \nabla \times$ 作用于动量方程，令涡量 $U = \nabla_{\perp}^2 \Phi$ ，则有

$$\rho \mathbf{e}_z \cdot \nabla \times \frac{d\mathbf{u}}{dt} = -\mathbf{e}_z \cdot \nabla \times \nabla p + \mathbf{e}_z \cdot \nabla \times (\mathbf{J} \times \mathbf{B})$$

$$\rho \mathbf{e}_z \cdot \nabla \times \frac{d\mathbf{u}}{dt} = \rho \mathbf{e}_z \cdot \nabla \times \left(\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u} \right) = \rho \left(\frac{\partial U}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla U \right)$$

$$\longrightarrow \frac{\partial U}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla U = \mathbf{B} \cdot \nabla J_z - \mathbf{J} \cdot \nabla B_z$$





撕裂模线性化方程组



- 因为 $\nabla \times (\nabla \Phi \times \hat{z}) = \nabla \Phi \nabla \cdot \hat{z} - \hat{z} \nabla \cdot \nabla \Phi + (\hat{z} \cdot \nabla) \nabla \Phi - (\nabla \Phi \cdot \nabla) \hat{z} = \nabla^2 \Phi$,

故有 $e_z \cdot \nabla \times u = e_z \cdot \nabla \times (\hat{z} \times \nabla \Phi) = \nabla^2 \Phi = U$ 。

- 因为 $u \cdot \nabla u = \nabla(u^2/2) - u \times (\nabla \times u)$,

故有 $e_z \cdot \nabla \times (u \cdot \nabla u) = -e_z \cdot \nabla \times [u \times (\nabla \times u)] = \nabla \cdot [e_z \times [u \times (\nabla \times u)]]$

$$= u \cdot \nabla (e_z \cdot \nabla \times u) - \nabla u_z \cdot \nabla \times u = u \cdot \nabla (e_z \cdot \nabla \times u)$$

- 假设 $u_0 = 0$, $E_0 = \eta J_0$ 且 $\nabla \cdot B_1 = 0$, $\nabla \cdot u_1 = 0$, 撕裂模方程组可线性化为:

$$\frac{\partial B_1}{\partial t} = \nabla \times (u_1 \times B_0) + \frac{\eta}{\mu_0} \nabla^2 B_1$$

$$\rho \frac{\partial U_1}{\partial t} = B_1 \cdot \nabla J_{0z} + B_0 \cdot \nabla J_{1z}$$

- 从涡量方程可以看出, 除了平衡磁场, 平衡电流密度梯度也对涡量时间演化起重要作用。实际上, 后面可看到, 平衡电流密度的梯度是撕裂模的驱动源。





描述撕裂模不稳定性的方程组

- 假设等离子体在 z 方向保持均匀性, z 方向的扰动波矢为 0, 设扰动磁场 $B_1 = B_{1x}e_x + B_{1y}e_y$ 为 $B_{1x} = \tilde{B}_x(x) \sin ky \exp(\gamma t)$ 和 $B_{1y} = \tilde{B}_y(x) \cos ky \exp(\gamma t)$ 。
- 设扰动速度 $u_1 = u_{1x}e_x + u_{1y}e_y$ 的形式为 $u_{1x} = -\tilde{u}_x(x) \cos ky \exp(\gamma t)$ 和 $u_{1y} = \tilde{u}_y(x) \sin ky \exp(\gamma t)$ 。
- 则无散场条件 $\nabla \cdot B_1 = 0$ 和不可压缩条件 $\nabla \cdot u_1 = 0$ 分别变成, $d\tilde{B}_x/dx - k\tilde{B}_y = 0$, 和 $d\tilde{u}_x/dx - k\tilde{u}_y = 0$ 。
- 利用这两个条件和安培定律, 磁感应方程和涡流方程则变成

$$\gamma \tilde{B}_x = k B_{0y} \tilde{u}_x + \frac{\eta}{\mu_0} \left(\frac{d^2 \tilde{B}_x}{dx^2} - k^2 \tilde{B}_x \right)$$
$$\frac{\rho \gamma}{k} \left(\frac{d^2 \tilde{u}_x}{dx^2} - k^2 \tilde{u}_x \right) = \frac{\tilde{B}_x}{\mu_0} \frac{d^2 B_{0y}}{dx^2} - \frac{B_{0y}}{\mu_0} \left(\frac{d^2 \tilde{B}_x}{dx^2} - k^2 \tilde{B}_x \right)$$





边界层方法

- 要精确地求解上述微分方程组几乎是不可能的，必须寻求近似方法来求解。一般情况下等离子体中电阻率是很小的，因此在远离 $x = 0$ 的地方，磁感应方程右边的第二项（即电阻项）比第一项要小，可以用理想情况来近似，电阻撕裂模的增长率可以忽略不计。只有在 $x = 0$ 附近，当且仅当 $d^2 \tilde{B}_x / dx^2$ 足够大，也即 $\tilde{B}_x$ 的变化很陡峭时，电阻项才会起重要作用。
- 所以说， $x = 0$ 附近有个很窄的电阻奇异层，这是产生撕裂模不稳定性的必要条件。正是基于这样的物理考虑，可引入一种奇异微扰方法（Singular Perturbation Method）——边界层方法（Layer Boundary Approach）来处理撕裂模。即将整个等离子体区域分为内区和外区，在电阻奇异层附近的区域称之为内区，可忽略同类项中变化缓慢的项，远离电阻奇异层的区域称之为外区，可忽略电阻和增长率。分别求出磁感应方程和涡流方程在内外区的近似解，然后采用渐进匹配（asymptotic matching）方法将内区解和外区解衔接起来，得到增长率的表达式。

()

——高等应用数学方法





撕裂模方程的外区解

- 忽略电阻和增长率之后，从涡流方程可得

$$\frac{d^2 \tilde{B}_x}{dx^2} - \left(k^2 + \frac{1}{B_{0y}} \frac{d^2 B_{0y}}{dx^2} \right) \tilde{B}_x = 0$$

- 显而易见，此方程依赖于平衡磁场的选取， $d^2 B_{0y}/dx^2$ 实际上是平衡电流密度的梯度。到目前为止，还没有找到适用于任意平衡磁场（或平衡电流密度）的精确解。取 $B_{0y} = \bar{B}_{0y} \tanh(x)$ ，则上述方程可以改写成

$$\frac{d^2 \tilde{B}_x}{dx^2} - (k^2 - 2 \operatorname{sech}^2 x) \tilde{B}_x = 0$$

- 方程的通解为 $\tilde{B}_x = c_1 \exp(-kx)[1 + \tanh(x)/k] + c_2 \exp(kx)[1 - \tanh(x)/k]$ 。将外区分为 $x < 0$ 和 $x > 0$ 两个区间，应分别满足边界条件 $\tilde{B}_x(-\infty) = 0$ 和 $\tilde{B}_x(\infty) = 0$ 。同时，从外区看来，奇异层是很窄的，故在 $x = 0$ 处可假设 $\tilde{B}_x$ 满足连续性条件。





外区解和不稳定性判据

- 则涡流方程的解变成

$$\tilde{B}_x(x) = \begin{cases} \tilde{B}_x(0) \exp(kx)[1 - \tanh(x)/k] & x < 0 \\ \tilde{B}_x(0) \exp(-kx)[1 + \tanh(x)/k] & x > 0 \end{cases}$$

- 由于缺少一个边条件, $\tilde{B}_x(0)$ 无法确定。由于在 $x = 0$ 处导数 $d\tilde{B}_x/dx$ 不连续, 1963 年, Furth、Killeen 和 Rosenbluth 在关于线性撕裂模的经典论文中巧妙地引入了导数 $d\tilde{B}_x/dx$ 在 $x = 0$ 处的阶跃值:

$$\Delta' = \frac{1}{\tilde{B}_x(0)} \left[\left. \frac{d\tilde{B}_x}{dx} \right|_{0+} - \left. \frac{d\tilde{B}_x}{dx} \right|_{0-} \right] = 2 \left(\frac{1}{k} - k \right)$$

- 显然, Δ' 已与 $\tilde{B}_x(0)$ 无关。后面将会看到, 只有当 $\Delta' > 0$ 时, 撕裂模才会不稳定。通常, 撕裂模不稳定性判据取决于扰动波数、平衡电流密度梯度和磁场梯度及奇异层的位置。对于 $B_{0y} = \bar{B}_{0y} \tanh(x)$ 的特例, 不稳定性判据为 $\Delta' = 2(1/k - k) > 0$, 即撕裂模对于 $k^2 < 1$ 的长波模是不稳定的。





撕裂模方程的内区解

- 为了明确知道哪些项可以忽略，假设电阻奇异层的宽度为 δ ，增长率 γ 、电阻率 η 、扰动磁场 $\tilde{B}_x$ 和扰动速度 $\tilde{u}_x$ 的量级分别满足下列关系

$$\delta \sim \gamma \sim \eta^{1/3}, \quad \tilde{B}_x \sim \tilde{u}_x \sim \delta$$

- 注意此时对扰动函数的导数的量级为 $d\tilde{f}/dx \sim \tilde{f}/\delta$ ，而对平衡函数的导数的量级为 $df_0/dx \sim f_0/a$ 。则当 $x \sim \delta$ 时可将磁感应方程和涡流方程中各项的量级进行定标

$$\begin{array}{ccccccc} \gamma \tilde{B}_x & = & k B'_{0y} x \tilde{u}_x & + & \frac{\eta}{\mu_0} \left(\frac{d^2 \tilde{B}_x}{dx^2} - k^2 \tilde{B}_x \right) \\ \delta^2 & & \delta^2 & & \delta^2 & & \delta^4 \end{array}$$

$$\begin{array}{ccccccc} \frac{\rho \gamma}{k} \left(\frac{d^2 \tilde{u}_x}{dx^2} - k^2 \tilde{u}_x \right) & = & \frac{\tilde{B}_x}{\mu_0} \frac{dB_{0y}}{dx} & - & \frac{B'_{0y} x}{\mu_0} \left(\frac{d^2 \tilde{B}_x}{dx^2} - k^2 \tilde{B}_x \right) \\ \delta^0 & & \delta^2 & & \delta^1 & & \delta^0 \quad \delta^2 \end{array}$$

- 因为在 $x = 0$ 附近，这里已取 $B_{0y} \approx B'_{0y} x$ 。





撕裂模方程的内区解

- 略去各方程中的高阶小量之后，内区方程变成

$$\gamma \tilde{B}_x = k B'_{0y} x \tilde{u}_x + \frac{\eta}{\mu_0} \frac{d^2 \tilde{B}_x}{dx^2}$$

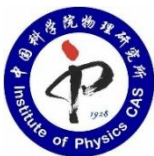
$$\frac{\rho \gamma}{k} \frac{d^2 \tilde{u}_x}{dx^2} = - \frac{B'_{0y} x}{\mu_0} \frac{d^2 \tilde{B}_x}{dx^2}$$

- 合并这两个方程可得

$$\frac{\rho \gamma \eta}{k B'_{0y}} \frac{d^2 \tilde{u}_x}{dx^2} = x (k B'_{0y} x \tilde{u}_x - \gamma \tilde{B}_x)$$

- 为简单起见，考虑到电阻奇异层很窄，尽管 $\tilde{B}_x$ 的导数变化很大，但 $\tilde{B}_x$ 本身变化不大，故可引入“常 $\tilde{B}_x$ 近似”，即用 $\tilde{B}_x(0)$ 来代替 $\tilde{B}_x$ ，方程马上简化为二阶微分方程。引入 $x \equiv \delta X$ ，和 $\tilde{u}_x = -[\gamma \tilde{B}_x(0)/k B'_{0y} \delta] Y(X)$ ，其中 X 为伸展变量，则可得

$$Y'' - X^2 Y = X$$





撕裂模方程的内区解

以及奇异层宽度与电阻率和增长率之间的关系式

$$\delta = (\rho\eta\gamma/k^2 B_{0y}'^2)^{1/4}$$

- 方程 $Y'' - X^2 Y = X$ 的解为 (级数解为 $Y(X) = -\sqrt{2}e^{-X^2/2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{H_{2n+1}(X)}{(4n+3) \cdot 4^n \cdot n!}$)

$$Y(X) = -\frac{X}{2} \int_0^1 d\mu \exp\left(-\frac{1}{2}X^2\mu\right)(1-\mu^2)^{1/4}$$

- 将其带入方程可检验其正确性。利用方程 $(\rho\gamma/k) d^2\tilde{u}_x/dx^2 = -(B_{0y}'x/\mu_0) d^2\tilde{B}_x/dx^2$, 可求出扰动磁场 $\tilde{B}_x$ 在内区的阶跃值

$$\begin{aligned}\Delta(\gamma) &= \frac{1}{\tilde{B}_x(0)} \int_{0-}^{0+} \frac{d^2\tilde{B}_x}{dx^2} dx = -\frac{1}{\tilde{B}_x(0)} \frac{\mu_0\rho\gamma}{kB_{0y}'} \int_{0-}^{0+} \frac{d^2\tilde{u}_x}{dx^2} \frac{dx}{x} \\ &= \frac{\mu_0\rho\gamma^2}{k^2 B_{0y}'^2 \delta^3} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d^2Y}{dX^2} \frac{dX}{X} = \frac{\pi\Gamma(3/4)}{\Gamma(1/4)} \frac{\mu_0\delta\gamma}{\eta}\end{aligned}$$





渐进匹配条件和增长率

- 根据边界层方法，引入渐进匹配条件

$$\Delta' = \Delta(\gamma)$$

- 可以看出，仅当 $\Delta' > 0$ 时才有 $\gamma > 0$ ，且电阻撕裂模线性的增长率为

$$\gamma = \left[\frac{\Gamma(1/4)L\Delta'}{\pi\Gamma(3/4)} \right]^{4/5} \tau_A^{-2/5} \tau_R^{-3/5} \sim \eta^{3/5}$$

- 这里阿尔芬时间 $\tau_A = \sqrt{\mu\rho}/kB'_{0y}L$ ，电阻扩散时间 $\tau_R = \mu L^2/\eta$ ， L 为 x 方向的空间长度。奇异层宽度的表达式变成

$$\delta = L(\gamma\tau_A^2\tau_R^{-1})^{1/4} = L \left[\frac{\Gamma(1/4)L\Delta'}{\pi\Gamma(3/4)} \right]^{1/5} \left(\frac{\tau_A}{\tau_R} \right)^{2/5} \sim \eta^{2/5}$$

- 撕裂模的稳定性取决于电流密度梯度的退稳效应和磁力线弯曲引起的致稳效应。长波模是最不稳定的，其物理原因就在于短波模更容易引起磁力线的弯曲。





关于线性撕裂模量级的讨论

- 一开始我们假设电阻奇异层宽度 δ ，增长率 γ 和电阻率 η 的量级关系为

$$\delta \sim \gamma \sim \eta^{1/3}$$

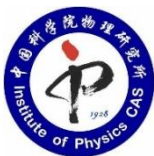
- 可是从推导出的结果来看，量级关系发生了变化，

$$\gamma \sim \eta^{3/5}, \quad \delta \sim \eta^{2/5}$$

- 通常情况下，后面的结果与前面的假设应该一致，否则就要回过头来调整物理模型中的量级假设。

- 此处出现不一致的原因不是量级假设不对头，而很可能是在求解内区方程的过程中作了“常 $\tilde{B}_x$ 近似”。因为对于 $m = 1$ 的电阻性扭曲模，内区方程与撕裂模类似，在解的过程中不作“常 $\tilde{B}_x$ 近似”，结果可得到

$$\delta \sim \gamma \sim \eta^{1/3}$$





描述撕裂模的标量方程组

- **柱位形或环位形模型：**利用大纵横比 ($\varepsilon = a/R \ll 1$) 和低 β ($\beta \sim \varepsilon^2$) 近似，可以把电阻MHD方程组简化成标量形式。

$$\rho \frac{d\mathbf{u}}{dt} = -\nabla p + \mathbf{J} \times \mathbf{B}$$

$$\mathbf{J} = \frac{1}{\mu_0} \nabla \times \mathbf{B}$$

$$\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = -\nabla \times \mathbf{E}$$

$$\mathbf{E} + \mathbf{u} \times \mathbf{B} = \eta \mathbf{J}$$

$$\mathbf{B} = \hat{\mathbf{z}} \times \nabla \Psi$$

$$J_z = \nabla_{\perp}^2 \Psi$$

$$\mathbf{u} = \hat{\mathbf{z}} \times \nabla \Phi$$

$$U = \nabla_{\perp}^2 \Phi$$

$$\frac{\partial \Psi}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla \Psi = \frac{\eta}{\mu_0} J_z$$

$$\frac{\partial U}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla U = \mathbf{B} \cdot \nabla J_z - \mathbf{J} \cdot \nabla B_z$$

这里假设电阻率 η 和数密度 ρ 均为常数。

这里 Ψ 为极向磁通， Φ 为流函数， J_z 为纵向电流密度， U 为涡量。





撕裂模方程组

- 利用 $\nabla \times (f\mathbf{A}) = f\nabla \times \mathbf{A} + \nabla f \times \mathbf{A}$, $\mathbf{A} \times (\mathbf{B} \times \mathbf{C}) = (\mathbf{A} \cdot \mathbf{C})\mathbf{B} - (\mathbf{A} \cdot \mathbf{B})\mathbf{C}$, 故有

$$\mathbf{B} = \hat{\mathbf{z}} \times \nabla \Psi = -\nabla \times (\Psi \hat{\mathbf{z}})$$

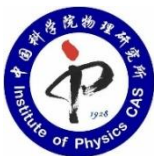
- 可得

$$\frac{\partial \nabla \times (\Psi \hat{\mathbf{z}})}{\partial t} = \frac{\eta}{\mu_0} \nabla \times \mathbf{J} - \nabla \times (\mathbf{v} \times \mathbf{B})$$

$$\rightarrow \frac{\partial (\Psi \hat{\mathbf{z}})}{\partial t} = \frac{\eta}{\mu_0} \mathbf{J} - \mathbf{v} \times \mathbf{B} + \nabla \Phi$$

- 用 $\hat{\mathbf{z}}$ 点乘各项, 利用 $\hat{\mathbf{z}} \cdot \mathbf{v} \times \mathbf{B} = \mathbf{v} \cdot \mathbf{B} \times \hat{\mathbf{z}} = \mathbf{v} \cdot (\hat{\mathbf{z}} \times \nabla \Psi) \times \hat{\mathbf{z}} = \mathbf{v} \cdot \nabla \Psi$ 可得

$$\frac{\partial \Psi}{\partial t} = \frac{\eta}{\mu_0} J_z - \mathbf{v} \cdot \nabla \Psi$$





关于非线性撕裂模不稳定性

- 最近，我们对非线性撕裂模式的分析方法进行了综述。
- 结果表明，Rutherford模型已经引发了关于非线性撕裂模的大量研究。其物理图像是清晰的，其数学方法巧妙但仍然令人费解。它试图通过一个非线性变换从线性方程导出一种“非线性行为”。
- 本人的模型包括了撕裂模的线性增长、卢瑟福行为和新的行为。研究发现，磁场的准线性修正为非线性增长提供了一种新的阻尼机制。如果撕裂模是弱不稳定的，新的行为 $w \sim t^{1/2}$ 将成为主导。
- 前人已导出撕裂模不稳定性判据的一些解析表达式。我们导出的不稳定性判据在极限情况下可涵盖前人的结果，并已扩展到了包括高能粒子的影响。

Li, Yang, Cai, PST 20 (2018) 094002

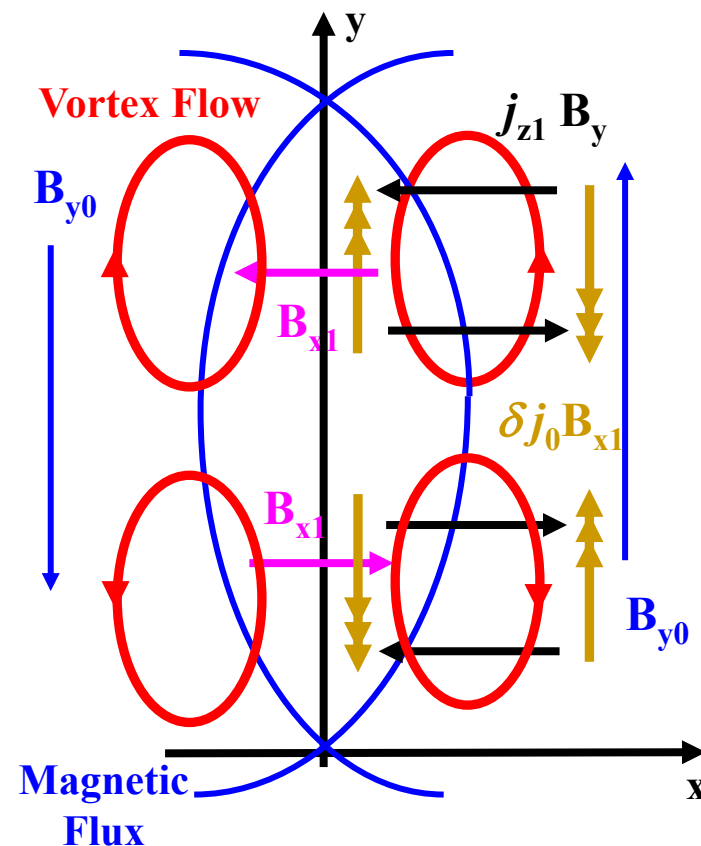




非线性撕裂模的Rutherford模型



- 1973年, P. H. Rutherford 构造了一个关于非线性撕裂模不稳定性的著名模型, 激发了无数的后续研究。 (Phys. Fluids 1973)
- 当磁岛宽度大于电阻奇异层宽度 ($w > \delta_0$) 时, 涡流 (vortex flow) 会感应出涡旋电流 (eddy current) δJ_{z0} . 由此产生的非线性Lorentz力 $\delta J_{z0} B_{x1}$ 会提供一个减缓涡流的力矩。
- 这个机制会降低撕裂模的增长率, 使得在混合时间尺度上的指数增长变成在电阻尺度上的代数增长 $\psi \sim t^{1/2}$ 。



Rutherford, PoF 16(11) (1973)





Rutherford 模型

- Rutherford 模型中的数学方法看起来很巧妙，但仍然令人费解。

$$\frac{\partial \Psi}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla \Psi = \frac{\eta}{\mu_0} J_z$$

$$\frac{\partial U}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla U = \mathbf{B} \cdot \nabla J_z$$

- 假定 $\Psi(x, y, t) = \Psi_0(x) + \tilde{\Psi}(y, t)$, 且在 $x = 0$ 的电阻奇异层附近 $\Psi_0(x) = B'_y x^2/2$, 则感应方程变成了一个线性方程

$$\frac{\partial \tilde{\Psi}}{\partial t} + \left(\frac{\partial \Phi}{\partial t} \right)_\Psi B'_y x = \eta (J_z - J_{z0})$$

此处 $J_z - J_{z0} = \nabla^2 \tilde{\Psi}$ 。

- 后面的非线性是如何从线性方程里产生的呢？





Rutherford 模型

- 将此方程各项均除以 x ，它仍然是个线性方程

$$\frac{\partial \tilde{\Psi} / \partial t}{x} + B'_y \left(\frac{\partial \Phi}{\partial y} \right)_\psi = \eta \frac{J_z - J_{z0}}{x}$$

- 将各项在常数磁面上对 y 作平均，则起非线性驱动作用的涡流项被湮灭掉了。磁感应方程和涡流方程之间的桥梁也没有了。

$$\left\langle \frac{\partial \tilde{\Psi} / \partial t}{x} \right\rangle_y + B'_y \left\langle \left(\frac{\partial \Phi}{\partial y} \right)_\psi \right\rangle_y = \eta \frac{J_z - J_{z0}}{x}$$

这里 $\langle f \rangle_y \equiv k \int_0^{2\pi/k} f dy / 2\pi$ 。

- 此时假设惯性可以忽略，则涡流方程只剩下 $B \cdot \nabla J_z = 0$ ，由此得到 $J_z = J_z(\psi)$ 。





Rutherford 模型

- 非线性是通过非线性变换 $x = [2(\Psi - \tilde{\Psi}(y, t))/B'_y]^{1/2}$ 引入的，电流密度被写成非线性的表达式

$$J_z(\Psi) = J_{z0} + \eta^{-1} \left\langle \frac{\partial \tilde{\Psi} / \partial t}{[(\Psi - \tilde{\Psi}(y, t))]^{1/2}} \right\rangle_y / \left\langle [(\Psi - \tilde{\Psi}(y, t))]^{-1/2} \right\rangle_y$$

- 采用渐进匹配 $\Delta' \Psi_1 = 2 \langle \cos ky \int_{-\infty}^{\infty} J_z dx \rangle_y$ ，可以得到 Rutherford 的非线性演化

$$\Delta' \Psi_1^{1/2} = \frac{4A}{\eta (2B'_y)^{1/2}} \frac{\partial \Psi_1}{\partial t}$$

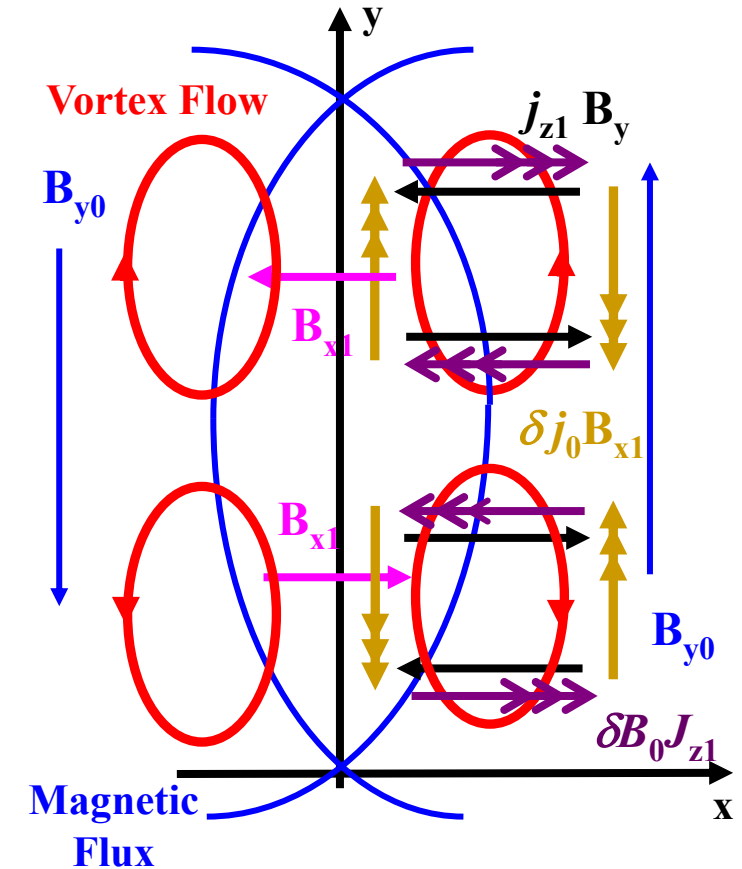
- 此处 $A \approx 0.07$ 。文章一开始形式上假设所有的谐波都包含在内， $\tilde{\Psi}(y, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \Psi_n(t) \cos nky$ ，实际上仅当 $\tilde{\Psi}(y, t) = \Psi_1(t) \cos ky$ ，才能得到此结果。



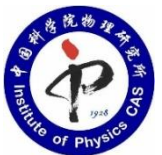


本人关于非线性撕裂模的模型

- 1995年，本人采用边界层方法和标准微扰论建立了一个统一的解析模型，包含撕裂模的线性和非线性演化。
- 发现由准线性磁场 δB_0 感应的非线性 Lorentz 力 $\delta B_0 J_{z1}$ ，与线性驱动力反向，并会使得涡流慢化。由此导出了一种新的代数增长 $\Psi_1 \propto t$ 。
- 在Rutherford模型中，这种致稳机制曾在 $\partial/\partial t \ll \eta/\delta^2$ 的假定下通过磁面平均算符被湮灭了。



D. Li, Phys. Plasmas, 2(9), 3275, 1995.





撕裂模的非线性演化

- 简化的电阻 MHD 标量方程组在极坐标系中可以写成

$$\frac{\partial \Psi}{\partial t} + \frac{1}{r} \left(\frac{\partial \Psi}{\partial r} \frac{\partial \Phi}{\partial \theta} - \frac{\partial \Psi}{\partial \theta} \frac{\partial \Phi}{\partial r} \right) = \eta J_z - \frac{\partial \Phi}{\partial z}$$

$$\frac{\partial U}{\partial t} + \frac{1}{r} \left(\frac{\partial U}{\partial r} \frac{\partial \Phi}{\partial \theta} - \frac{\partial U}{\partial \theta} \frac{\partial \Phi}{\partial r} \right) = -S^2 \left[\frac{1}{r} \left(\frac{\partial \Psi}{\partial r} \frac{\partial J_z}{\partial \theta} - \frac{\partial \Psi}{\partial \theta} \frac{\partial J_z}{\partial r} \right) + \frac{\partial J_z}{\partial z} \right]$$

此处 r , θ , 和 z 分别表示径向、极向和纵向坐标。常数 $S = \tau_R/\tau_A$ 是电阻扩散时间与 Alfvén 时间之比。





撕裂模方程组



$$\Psi = \Psi_0(r) + \delta\Psi(r, t) + \sum \Psi_l(r, t) \cos l(m\theta - nz)$$

$$\Phi = \sum \Phi_l(r, t) \sin l(m\theta - nz)$$

- 将标量方程组对 θ 做积分 $(m/2\pi) \int_0^{2\pi/m} f d\theta$, 可以得到

$$\frac{\partial \delta\Psi}{\partial t} + \frac{m}{2r} \sum_l \frac{\partial(\Psi_l \Phi_l)}{\partial r} = \eta \delta J$$

$$\frac{\partial \Psi_l}{\partial t} + \frac{lm}{r} \frac{\partial \delta\Psi}{\partial r} \Phi_l = \eta J_l + l \left(n - \frac{m}{q_0} \right) \Phi_l$$

$$\frac{\partial U_l}{\partial t} = -S^2 \left[\frac{lm}{r} \frac{dJ_0}{dr} \Psi_l + \frac{lm}{r} \frac{\partial \delta J}{\partial r} \Psi_l + l \left(n - \frac{m}{q_0} \right) J_l - \frac{lm}{r} \frac{\partial \delta\Psi}{\partial r} J_l \right]$$

这里 m 和 n 分别是极向和环向模数, $q_0(r) = r[d\Psi_0(r)/dr]^{-1}$ 为安全因子。





撕裂模的内区方程

- 在 $r = r_s$ 的电阻奇异层附近, 当 $\Psi_1 \sim \Phi_1 \sim \delta\Psi \sim O(\delta^2)$ 且 $w \sim \delta_0$ 时, 非线性项和线性项的主导项同量级。且 $w > \delta_0$ 时, 非线性项将变得更重要, 线性模的量级 $\gamma_0 \sim \eta^{3/5}$, $\delta_0 \sim \eta^{2/5}$ 和 $\partial/\partial t < \eta^{3/5}$ 将不再重要, 仅保留 $l = 1$ 的谐波, 内区方程组为

$$\frac{\partial \delta\Psi}{\partial t} + \frac{m}{2r_s} \frac{\partial(\Psi_1 \Phi_1)}{\partial x} = \eta \frac{\partial^2 \delta\Psi}{\partial x^2}$$

$\delta^3 \qquad \delta^3 \qquad \delta^3$

$$\frac{\partial \Psi_1}{\partial t} = \eta \frac{\partial^2 \Psi_1}{\partial x^2} + \left(\mu_0 - \frac{m}{r_s} \frac{\partial^2 \delta\Psi}{\partial x^2} \right)_{x=0} x \Phi_1$$

$\delta^3 \qquad \delta^3 \qquad \delta^3$

$$\frac{\partial^3 \Phi_1}{\partial x^2 \partial t} = -S^2 \left[\frac{m}{r_s} \frac{\partial^3 \delta\Psi}{\partial x^3} \Psi_1 + \left(\mu_0 - \frac{m}{r_s} \frac{\partial^2 \delta\Psi}{\partial x^2} \right)_{x=0} x \frac{\partial^2 \Psi_1}{\partial x^2} \right]$$

$\delta \qquad \delta \qquad \delta$

这里 $x = r - r_s$, $\mu_0 = [m/q_0^2(r_s)][q_0(r_s)/dr]$ 。已使用关系式 $\delta q_0 = -(q_0^2/r)\partial\delta\Psi/\partial r$ 。





撕裂模的内区方程

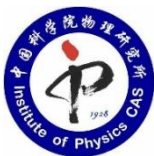
- 为简单起见，现在沿用 Rutherford 的做法，暂不考虑 $\partial \delta \Psi / \partial t$ 和惯性项 $\partial^3 \Phi_1 / \partial x^2 \partial t$ 。
将从第一个方程得到的关系式

$$\frac{\partial^2 \delta \Psi}{\partial x^2} = \frac{m}{2\eta r_s} \frac{\partial(\Psi_1 \Phi_1)}{\partial x}$$

- 代入第二、三个方程可得:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Psi_1}{\partial t} &= \eta \frac{\partial^2 \Psi_1}{\partial x^2} + \left[\mu_0 - \frac{m^2}{2\eta r_s^2} \frac{\partial(\Psi_1 \Phi_1)}{\partial x} \right]_{x=0} x \Phi_1 \\ \frac{m^2}{2\eta r_s^2} \frac{\partial^2(\Psi_1 \Phi_1)}{\partial x^2} + \left[\mu_0 - \frac{m^2}{2\eta r_s^2} \frac{\partial(\Psi_1 \Phi_1)}{\partial x} \right]_{x=0} x \frac{\partial^2 \Psi_1}{\partial x^2} &= 0 \end{aligned}$$

- 怎么解这一组偏微分方程组？换言之，怎么消去空间变量，从而得到撕裂模的演化方程？





“常- ψ ”近似

- 大家熟悉的“常- ψ ”近似仍然有效。因为 ψ_1 是 x 的偶函数而 ϕ_1 是 x 的奇函数， ψ_1 的空间变化小于 ϕ_1 的空间变化， $\partial^i(\psi_1\phi_1)/\partial x^i$ 可用 $\psi_1(0,t)\partial^i(\phi_1)/\partial x^i$ 来近似。

$$\frac{\partial \psi_1(0,t)}{\partial t} = \eta \frac{\partial^2 \psi_1(x,t)}{\partial x^2} + \mu(t)x\phi_1(x,t)$$

$$v(t) \frac{\partial^2 \phi_1(x,t)}{\partial x^2} = -\mu(t)x \frac{\partial^2 \psi_1(x,t)}{\partial x^2}$$

此处

$$\mu(t) = \left[\mu_0 - \frac{m^2 \psi_1(0,t)}{2\eta r_s^2} \frac{\partial \phi_1(x,t)}{\partial x} \right]_{x=0}$$

$$v(t) = \frac{m^2}{2\eta r_s^2} \psi_1^2(0,t)$$





分离变量方法

- 上述两个方程可以合并成

$$v(t) \frac{\partial^2 \Phi_1(x, t)}{\partial x^2} = -\frac{\mu(t)x}{\eta} \left[\frac{\partial \Psi_1(0, t)}{\partial t} - \mu(t)x \Phi_1(x, t) \right]$$

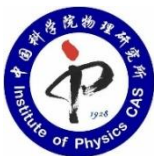
- 引入变量变换 $x = \delta(t)/X$, 和函数变换

$$\Phi_1(x, t) = -[\mu(t)\delta(t)]Y(X) \partial \Psi_1(0, t)/\partial t$$

- 这里引入的 X 为伸展变量, 这样从内区来看空间尺度很大。因为有 $\partial/\partial x = \delta(t)^{-1} \partial/\partial X$, 上面的方程可以分离成分别为空间和时间变量的两个方程

$$\frac{d^2 Y(X)}{dX^2} - X^2 Y(X) = X$$

$$\delta(t) = \left[\frac{\eta v(t)}{\mu^2(t)} \right]^{1/4}$$





外区方程和参量 Δ'

- 在电阻奇异层之外的外区，相当于理想磁流体，电阻和惯性可以忽略不计，因为它们仅在奇异层内部起重要作用。外区方程变成

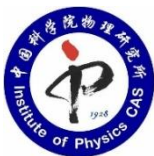
$$\frac{m}{r} \frac{dJ_0}{dr} \Psi_1 + \frac{m}{r} \frac{\partial \delta J}{\partial r} \Psi_1 + \left(n - \frac{m}{q_0} \right) J_1 - \frac{m}{r} \frac{\partial \delta \Psi}{\partial r} J_1 = 0$$

- 假设此方程可分离变量的解为

$$\Psi_1(0, t) = \Psi_1(r_s, t) Z_1^\pm(r)$$

- 越过电阻奇异层的扰动量 $\Psi_1(0, t)$ 的对数微商的阶跃为

$$\Delta' = \left[\frac{\partial \ln \Psi_1(r, t)}{\partial r} \right]_{r_s^-}^{r_s^+} = \frac{dZ_1^+(r_s)}{dr} - \frac{dZ_1^-(r_s)}{dr}$$





撕裂模的非线性时间演化方程

- 可以利用内区方程导出参量 Δ 的表达式

$$\begin{aligned}\Delta &= \frac{1}{\Psi_1(0, t)} \int_{0^-}^{0^+} \frac{\partial^2 \Psi_1}{\partial x^2} dx = -\frac{v(t)}{\mu(t)\Psi_1(0, t)} \int_{0^-}^{0^+} \frac{dx}{x} \frac{\partial^2 \Phi_1}{\partial x^2} \\ &= \frac{\delta(t)}{\eta} \frac{\partial \ln \Psi_1(0, t)}{\partial t} \int_{0^-}^{0^+} \frac{dX}{X} \frac{d^2 Y}{dx^2} = C_0 \frac{\delta(t)}{\eta} \frac{\partial \ln \Psi_1(0, t)}{\partial t}\end{aligned}$$

- 采用渐进匹配条件，可以导出撕裂模的非线性时间演化方程为

$$\left(\frac{\partial \Psi_1}{\partial t}\right)^2 + \frac{\eta \Delta'^2}{\pi^{1/2} C_0} \Psi_1 \frac{\partial \Psi_1}{\partial t} = \frac{2^{1/2} s_0 \eta^2 \Delta'^2}{q C_0^2} \Psi_1.$$

(Rutherford) (新的)

- 如果撕裂模是强不稳定的，则Rutherford 揭示的非线性行为 $w \sim t$ 占主导，若撕裂模是弱不稳定的，则本人发现的非线性行为 $w \sim t^{1/2}$ 占主导。一般情况下撕裂模的非线性发展是这两种行为的组合。





撕裂模的统一模型

- 现考虑 $\partial\delta\Psi/\partial t$ 和惯性项 $\partial^3\Phi_1/\partial x^2\partial t$ ，这样可将线性和非线性演化都包含。

$$\frac{\partial\delta\Psi}{\partial t} - \eta \frac{\partial^2\delta\Psi}{\partial x^2} = \frac{m}{2r_s} \frac{\partial(\Psi_1\Phi_1)}{\partial x}$$

$$\frac{\partial\Psi_1}{\partial t} = \eta \frac{\partial^2\Psi_1}{\partial x^2} + \left(\mu_0 - \frac{m}{r_s} \frac{\partial^2\delta\Psi}{\partial x^2} \right)_{x=0} x\Phi_1$$

$$\frac{\partial^3\Phi_1}{\partial x^2\partial t} = -S^2 \left[\frac{m}{r_s} \frac{\partial^3\delta\Psi}{\partial x^3} \Psi_1 + \left(\mu_0 - \frac{m}{r_s} \frac{\partial^2\delta\Psi}{\partial x^2} \right)_{x=0} x \frac{\partial^2\Psi_1}{\partial x^2} \right]$$

- 第一个方程为非齐次的扩散方程，为了求解，引入伸展变量 $X = x/\delta$ ，这样该方程与初始条件构成了一个 Cauchy 问题：

$$\begin{cases} \frac{\partial\delta\Psi}{\partial t} - \frac{\eta}{\delta^2} \frac{\partial^2\delta\Psi}{\partial X^2} = -\frac{m}{2r_s\delta} \frac{\partial(\Psi_1\Phi_1)}{\partial X} & (-\infty < X < +\infty, t > 0) \\ \delta\Psi(X, 0) = 0 \end{cases}$$





扩散方程的解

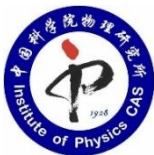
- 可以采用 Green 函数方法或 Fourier 变换来求解

$$\delta\Psi(X, t) = -\frac{m}{4r_s} \int_0^t \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d\xi d\tau}{\sqrt{\pi\eta(t-\tau)}} \frac{\partial(\Psi_1\Phi_1)}{\partial\xi} \exp\left[-\frac{(X-\xi)^2\delta^2}{4\eta(t-\tau)}\right]$$

- 故可得

$$\frac{\partial\delta\Psi}{\partial t} = -\frac{m}{4r_s\sqrt{\pi\eta t}} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\partial(\Psi_1\Phi_1)}{\partial\xi} \exp\left[-\frac{(X-\xi)^2\delta^2}{4\eta t}\right] d\xi$$

$$\frac{\partial^2\delta\Psi}{\partial X^2} = \frac{m\delta}{2\eta r_s} \left\{ \frac{\partial(\Psi_1\Phi_1)}{\partial X} - \frac{\delta}{2\sqrt{\pi\eta t}} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\partial(\Psi_1\Phi_1)}{\partial\xi} \exp\left[-\frac{(X-\xi)^2\delta^2}{4\eta t}\right] d\xi \right\}$$





扩散方程的解

$$\frac{\partial^2 \delta \Psi}{\partial X^2} = \frac{m\delta}{2\eta r_s} \left\{ \frac{\partial(\Psi_1 \Phi_1)}{\partial X} - \frac{\delta}{2\sqrt{\pi\eta t}} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\partial(\Psi_1 \Phi_1)}{\partial \xi} \exp \left[-\frac{(X - \xi)^2 \delta^2}{4\eta t} \right] d\xi \right\}$$

- 红色积分中被积函数是连续和有界的，指数函数是正的。因此，按照积分的第一中值定理，在某一点 $\partial(\Psi_1 \Phi_1)/\partial \xi$ 可以从积分中移出来。同时，此积分可以看成是 $\partial(\Psi_1 \Phi_1)/\partial \xi$ 在高斯分布上的平均，该分布在 $\xi = X$ 达到最大值，自 $\xi = X$ 向两侧衰减。
- 考虑到以上两点，我采用近似，将 $\partial(\Psi_1 \Phi_1)/\partial \xi$ 从积分中移出，取其在 $\xi = X$ 点的值，并乘以 1/2，则红色部分变成

$$\begin{aligned} & \frac{\delta}{2\sqrt{\pi\eta t}} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\partial(\Psi_1 \Phi_1)}{\partial \xi} \exp \left[-\frac{(X - \xi)^2 \delta^2}{4\eta t} \right] d\xi \\ & \approx \frac{1}{2} \frac{\partial(\Psi_1 \Phi_1)}{\partial X} \frac{\delta}{2\sqrt{\pi\eta t}} \int_{-\infty}^{+\infty} \exp \left[-\frac{(X - \xi)^2 \delta^2}{4\eta t} \right] d\xi = \frac{1}{2} \frac{\partial(\Psi_1 \Phi_1)}{\partial X} \end{aligned}$$





撕裂模方程

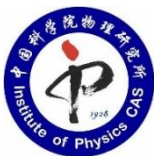
- 这样可以得到如下关系式，其中伸展变量 X 已换回到原来的变量 x ,

$$\frac{\partial^2 \delta\Psi}{\partial x^2} = \frac{m}{4\eta r_s} \frac{\partial(\Psi_1 \Phi_1)}{\partial x}, \quad \frac{\partial^3 \delta\Psi}{\partial x^3} = \frac{m}{4\eta r_s} \frac{\partial^2(\Psi_1 \Phi_1)}{\partial x^2}$$

- 将这两个关系式代入撕裂模的第二、三个方程可得

$$\frac{\partial \Psi_1}{\partial t} = \eta \frac{\partial^2 \Psi_1}{\partial x^2} + \left(\mu_0 - \frac{m^2}{4\eta r_s^2} \frac{\partial(\Psi_1 \Phi_1)}{\partial x} \right)_{x=0} x \Phi_1$$

$$\frac{\partial^3 \Phi_1}{\partial x^2 \partial t} = -S^2 \left[\frac{m^2}{4\eta r_s^2} \frac{\partial^2(\Psi_1 \Phi_1)}{\partial x^2} \Psi_1 + \left(\mu_0 - \frac{m^2}{4\eta r_s^2} \frac{\partial(\Psi_1 \Phi_1)}{\partial x} \right)_{x=0} x \frac{\partial^2 \Psi_1}{\partial x^2} \right]$$





“常- Ψ ”近似

- 类似地，上述方程可以采用“常- Ψ ”近似简化成：

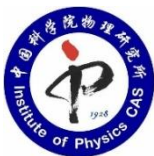
$$\frac{\partial \Psi_1(0, t)}{\partial t} = \eta \frac{\partial^2 \Psi_1(x, t)}{\partial x^2} + \bar{\mu}(t) x \Phi_1(x, t)$$
$$\left[\frac{\partial}{\partial t} + S^2 \bar{v}(t) \right] \frac{\partial^2 \Phi_1(x, t)}{\partial x^2} = -\bar{\mu}(t) x \frac{\partial^2 \Psi_1(x, t)}{\partial x^2}$$

- 这里有

$$\bar{\mu}(t) = \left[\mu_0 - \frac{m^2 \Psi_1(0, t)}{4\eta r_s^2} \frac{\partial \Phi_1(x, t)}{\partial x} \right]_{x=0}, \quad \bar{v}(t) = \frac{m^2}{4\eta r_s^2} \Psi_1^2(0, t)$$



$$\left[\frac{\partial}{\partial t} + S^2 \bar{v}(t) \right] \frac{\partial^2 \Phi_1(x, t)}{\partial x^2} = -\frac{\bar{\mu}(t) x}{\eta} \left[\frac{\partial \Psi_1(0, t)}{\partial t} - \bar{\mu}(t) x \Phi_1(x, t) \right]$$





分离变量方法

- 令流函数 $\Phi_1(x, t) = -\bar{\mu}(t)^{-1} \bar{\Phi}(x) \partial \Psi_1(0, t) / \partial t$, 则上述方程变成

$$\frac{d^2 \bar{\Phi}}{dx^2} \left[\frac{\partial}{\partial t} + S^2 \bar{v}(t) \right] \frac{1}{\bar{\mu}(t)} \frac{\partial \Psi_1(0, t)}{\partial t} = -\frac{\bar{\mu}(t)}{\eta} \frac{\partial \Psi_1(0, t)}{\partial t} [1 + x \bar{\Phi}]$$

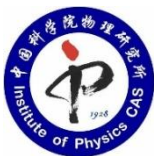
- 引入变量变换 $t = \tau$, $x = \bar{\delta}(\tau)/X$ 和函数变换 $\bar{\Phi}(x) = \bar{\delta}^{-1}(\tau) Y(X)$, 则有

$$\frac{\partial}{\partial x} = \frac{1}{\bar{\delta}} \frac{\partial}{\partial X}, \quad \frac{\partial}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial \tau} - \frac{\partial \ln \bar{\delta}}{\partial \tau} X \frac{\partial}{\partial X}$$

- 上面的方程可以分离成以下两个方程

$$\left[\frac{\partial}{\partial \tau} + S^2 \bar{v}(\tau) \right] \frac{1}{\bar{\mu}(\tau)} \frac{\partial \Psi_1(0, \tau)}{\partial \tau} = -\frac{\bar{\mu}(\tau) \bar{\delta}^4(\tau)}{\eta} \frac{\partial \Psi_1(0, \tau)}{\partial \tau}$$

$$\frac{d^2 Y(X)}{dX^2} - X^2 Y(X) = X$$





分离变量方法

- 第一个方程能够被表示成:

$$\bar{\delta}(\tau) = \left\{ \frac{\eta}{\bar{\mu}(\tau)} \left[\frac{\partial \Psi_1(0, \tau)}{\partial \tau} \right]^{-1} \left[\frac{\partial}{\partial \tau} + S^2 \bar{v}(\tau) \right] \frac{1}{\bar{\mu}(\tau)} \frac{\partial \Psi_1(0, \tau)}{\partial \tau} \right\}^{1/4}$$
$$\approx \left\{ \frac{\eta}{\bar{\mu}^2(\tau)} \left[\frac{\partial \ln \Psi_1(0, \tau)}{\partial \tau} + S^2 \bar{v}(\tau) \right] \right\}^{1/4}$$

其中 $\bar{\mu}(\tau) \approx \mu_0 - \frac{C_0}{(\pi\eta)^{1/2}} \frac{S^2 \bar{v}(\tau)}{[\partial \ln \Psi_1(0, \tau) / \partial \tau + S^2 \bar{v}(\tau)]^{1/2}} \frac{\partial \ln \Psi_1(0, \tau)}{\partial \tau}$

- 可以利用内区方程导出参量 Δ 的表达式

$$\Delta = \frac{1}{\Psi_1(0, t)} \int_{0^-}^{0^+} \frac{\partial^2 \Psi_1}{\partial x^2} dx = - \frac{1}{\bar{\mu}(\tau) \Psi_1(0, t)} \int_{0^-}^{0^+} \frac{dx}{x} \left[\frac{\partial}{\partial t} + S^2 \bar{v}(t) \right] \frac{\partial^2 \Phi_1}{\partial x^2}$$
$$= \frac{1}{\eta} \frac{\partial \ln \Psi_1}{\partial t} \int_{0^-}^{0^+} dx [1 + x \bar{\Phi}(x)] = C_0 \frac{\bar{\delta}(t)}{\eta} \frac{\partial \ln \Psi_1}{\partial t}$$





撕裂模的时间演化方程

- 采用渐进匹配条件 $\Delta = \Delta'$ ，利用 $\bar{\delta}(\tau)$ 和 $\bar{\mu}(\tau)$ 的表达式可导出撕裂模线性和非线性阶段的时间演化方程为

$$\left(\frac{\partial \Psi_1}{\partial t}\right)^2 \left(\frac{4\eta r_s^2}{m^2} \frac{\partial \ln \Psi_1}{\partial t} + \Psi_1^2\right) + \frac{\eta \Delta'^2}{\pi^{1/2} C_0} \Psi_1^3 \frac{\partial \Psi_1}{\partial t} = \frac{2\mu_0 r_s \eta^2 \Delta'^2}{m C_0^2} \Psi_1^2 \left(\frac{4\eta r_s^2}{m^2} \frac{\partial \ln \Psi_1}{\partial t} + \Psi_1^2\right)^{1/2}$$

(Linear) (Rutherford) (New) (Linear) (Rutherford)

- 如果略去线性项，此方程回到前面讨论的非线性时间演化情形：

$$\left(\frac{\partial \Psi_1}{\partial t}\right)^2 + \frac{\eta \Delta'^2}{\pi^{1/2} C_0} \Psi_1 \frac{\partial \Psi_1}{\partial t} = \frac{2^{1/2} s_0 \eta^2 \Delta'^2}{q C_0^2} \Psi_1.$$

(Rutherford) (New)





参量 Δ' 和不稳定性判据

- 在电阻奇异层的外区，由于比线性项小两个 $\delta(t)$ 量级，非线性项可以忽略，故外区方程为：

$$\frac{d^2\Psi_1}{dx^2} + \frac{1}{r} \frac{d\Psi_1}{dr} - \frac{m^2}{r^2} \Psi_1 - \frac{m}{B_\theta} \frac{dJ_{z0}/dr}{m - nq} = 0$$

- 1978年，J. Wesson 曾给出电流分布为抛物线分布情况下的撕裂模不稳定性示意图。
[1978, Nucl. Fusion]
- 1981年，H. R. Strauss 基于气球模表象采用大 m （极向模数）近似，导出了一个简单的参量 Δ' 的解析表达式。 [1981, Phys. Fluids]
- 1994年，Hegna 和 Callen 使用 $1/m$ 作为渐进小数，将 Strauss 导出的公式推广到有限 β 和非圆截面磁面的情形。 [1994, Phys, Plasmas]





参量 Δ' 的解析表达式

- 1998年, 本人导出了一个参量 Δ' 的新公式, 在大纵横比近似和低比压近似下可以适用于任意磁剪切位形下的 $m \geq 2$ 的撕裂模。
- 在电阻奇异层附近, 可以对外区方程的最后一项的分子和分母分别作Taylor展开, 保留不为零的第一项。

$$\frac{d^2\Psi}{dx^2} + \frac{1}{r} \frac{d\Psi}{dr} - \frac{m^2}{r^2} \Psi - \frac{\lambda}{r(r-r_s)} \Psi = 0$$

- 这里 $\lambda = -q_0^2(r_s)\sigma'_0(r_s)/q'_0(r_s) = \sigma'_0(r_s)/\iota'(r_s)$ 。 $\sigma_0(r) = rJ_{z0}/q_0B_\theta$ 与平衡电流密度 J_{z0} 、安全因子 q_0 、极向磁场 B_θ 相关, $\iota(r) = 1/q_0$ 为旋转变换。
- 令 $\Psi(r) = r^m y(r)$, 则外区方程可以被简化为

$$\frac{d^2y}{dr^2} + \frac{2m+1}{r} \frac{dy}{dr} - \frac{\lambda}{r(r-r_s)} y = 0$$

D. Li, Phys. Plasmas, 5(5), 1232, 1998.





求解外区方程

- 在电阻奇异层左边的区域 $r < r_s$, 令 $r = r_s x$, 可以找到方程的一个 Gauss 超几何函数的解

$$Y_1^{(i)}(x) = {}_2F_1(a, b, c, x)$$

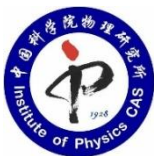
其中 $a = m - \sqrt{m^2 + \lambda}$, $b = m + \sqrt{m^2 + \lambda}$, $c = 2m + 1$ 。

- 在电阻奇异层右边的区域 $r > r_s$, 先令 $r = r_s x$, $y(r) = Y(x) = x^{-b} G(x)$, 再令 $z = 1/x$, $G(x) = g(z)$, 可以把方程变成另一个超几何微分方程

$$z(1-z) \frac{d^2 g}{dz^2} + \left(2\sqrt{m^2 + \lambda} + 1\right)(1-z) \frac{dg}{dz} - \lambda g = 0$$

- 此方程的一个解为 Gauss 超几何函数 $g(z) = {}_2F_1(b, -a, b - a + 1, 1/x)$, 故我们有

$$Y_1^{(o)}(x) = x^{-b} {}_2F_1(b, -a, b - a + 1, 1/x)$$





外区方程的解

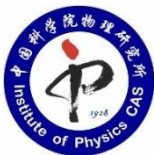
- 通过利用 $r = r_s$ 处的连续性条件，在 $r = r_s$ 附近的扰动磁通函数可以表示成

$$\psi(r) = \psi(r_s)x^m \begin{cases} Y_1^{(i)}(x)/Y_1^{(i)}(1) & r < r_s \\ Y_1^{(o)}(x)/Y_1^{(o)}(1) & r > r_s \end{cases}$$

这里 $\psi(r_s)$ 无法由线性理论给出。利用下列公式

$$\frac{d}{dx} {}_2F_1(a, b, c, x) = \frac{ab}{c} {}_2F_1(a+1, b+1, c+1, x)$$
$${}_2F_1(a, b, a+b, x) = \frac{\Gamma(a+b)}{\Gamma(a)\Gamma(b)} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(a)_n(b)_n}{n!} [2\Psi(n+1) - \Psi(a+n) - \Psi(b+n) - \log(1-x)]$$

其中 $(a)_n = \Gamma(a+n)/\Gamma(a)$ ， $\Psi(x) = d \ln \Gamma(x)/dx$ 是 digamma-psi 函数。





参量 Δ' 的解析表达式

- 从前面得到的方程的解，可以导出参量 Δ' 的解析表达式

$$\Delta' = \frac{b}{r_s} + \frac{\lambda}{r_s} [\Psi(1-a) - \Psi(1+a)]$$

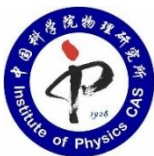
- 使用关系式

$$\Psi(1-x) = \Psi(x) + \pi \cot(\pi x)$$

$$\Psi(1+x) = \Psi(x) + 1/x$$

- 可以导出未考虑边界条件的参量 Δ' 的解析表达式为

$$\Delta' = -\frac{\pi\lambda}{r_s} \cot \left[\pi \left(\sqrt{m^2 + \lambda} - m \right) \right]$$





参数 Δ' 和不稳定性判据

- 从参量 $\Delta' > 0$ 的撕裂模不稳定性阈值，可以导出不稳定性判据为

$$\left| \frac{q_0 r_s}{B_\theta} \frac{dJ_{z0}/dr}{dq_0/dr} - \frac{1}{4} \right| > m$$

- 此判据依赖于平衡电流密度梯度与安全因子梯度及电阻奇异层的位置。
- 在大 m 极限下，参量 Δ' 的表达式退回到 Strauss、Hegna 与 Callen 采用大 m 近似得到的公式，我采用的 λ 等效于他们的 $2m\lambda$,

$$\Delta' = -\pi(\lambda/r_s) \cot(\pi\lambda/2m)$$

- 在大 m 极限下，可以退回到以前几个作者导出的不稳定性判据

$$\left| \frac{q_0 r_s}{B_\theta} \frac{dJ_{z0}/dr}{dq_0/dr} \right| > m$$

- 在 $\lambda = 0$ 极限下，可以重获著名的 $\Delta' = -2m/r_s$ 公式。





考虑边界条件的参量 Δ'

- 考虑边界条件 $\Psi(0) = \Psi(r_w) = 0$, 亦可导出参量 Δ' 的解析表达式为

$$\Delta' = -\frac{\pi\lambda}{r_s} \cot \left[\pi \left(\sqrt{m^2 + \lambda} - m \right) \right]$$

$$-\frac{\lambda}{r_s} \frac{\Gamma(b)\Gamma(-a)}{\Gamma(b-a+1)} \frac{(r_s/r_w)^{b-a}}{1-r_s/r_w} \frac{{}_2F_1(b, -a, b-a+1, r_s/r_w)}{{}_2F_1(1-b, 1+a, 2, 1-r_s/r_w)}$$

- 容易证实, 这一项后半部分的分式是 r_s/r_w 的慢变函数。因此, 将这个分式用其在 $r_s/r_w = 0$ 的值, 即 $\Gamma(1+b)\Gamma(1-a)/\Gamma(b-a)$ 来代替是个好近似。当 $r_s/r_w \leq 1/2$ 时, 上面的不稳定性判据简化成

$$\Delta' \approx -\frac{\pi\lambda}{r_s} \cot \left[\pi \left(\sqrt{m^2 + \lambda} - m \right) \right] - \frac{\lambda^2}{r_s(b-a)} \left[\frac{\Gamma(b)\Gamma(-a)}{\Gamma(b-a)} \right]^2 \frac{(r_s/r_w)^{b-a}}{1-r_s/r_w}$$





高能量离子对不稳定性判据的影响

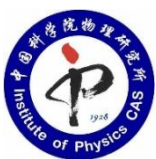
- 2011年，蔡辉山等人考虑了高能量离子对撕裂模不稳定性的影响，将动理论与磁流体力学相结合，导出了参量 Δ' 的解析表达式

$$\Delta' = -\frac{\pi(\lambda + \lambda_h)}{r_s} \cot \left[\pi \left(\sqrt{m^2 + \lambda + \lambda_h} - m \right) \right]$$

其中 $\lambda_h = -(\chi_0 \lambda / J'_{z0}) \sum_{\sigma} (\rho_{hm}^{\sigma})^{-1} d\beta_h^{\sigma} / dr$, $\chi_0 \leq 1$, ρ_{hm}^{σ} 表示带有最大能量的高能量离子的回旋半径, $\beta_h^{\sigma} = p_h^{\sigma} / B_0^2$ 为高能量离子的比压, $\sigma = +$ 对应于同向注入的通行离子 (co-CEI) (Circulating Energetic Ions), 而 $\sigma = -$ 对应于反向注入的通行离子 (counter-CEI)。

- 分析发现，如果高能量离子的动量足够大，同向注入的通行离子能够抑制撕裂模不稳定性，而反向注入的通行离子则能够促进撕裂模不稳定性的增长。

Cai et al., PRL 106,075002 (2011)





线性撕裂模的环耦合

- 物理模型：考虑低 β 和大纵横比托卡马克中不同螺旋之单模构成的环耦合撕裂模。
- 按照MHD方程解的结构构成本征值问题。根据渐进匹配可以得到一般色散关系的表达式。可导出环耦合撕裂模的增长率（特征值）和相应的扰动磁通（特征函数）。
- 环耦合通过对理想MHD解的修正起作用。不失一般性，通过分析带有柱分量 m/n 和 $(m+1)/n$ 的环耦合撕裂模增长率的变化趋势可得：
 - 环耦合对撕裂模有消稳作用。
 - 即使当环耦合参数相当小时，两个单模增长率的“拍频”也会导致强耦合。
 - 耦合效应并不显性地依赖于单模 $\Delta'^{(0)}$ 的大小，故 $\Delta'^{(0)} \sim \varepsilon$ 既非强耦合的必要条件也非充分条件。

Li & Huo, PFB 5(10) 3737 (1993)





线性撕裂模的非线性耦合

- 物理模型：柱位形中带不同螺旋线性撕裂模的非线性耦合。
- 线性撕裂模当其存在时就会通过 $\mathbf{v} \times \mathbf{B}$ 感应的电场非线性地耦合在一起。
- 按照线性撕裂模的标准定标，主要通过电阻层中极向扰动磁通的演化方程中对流项产生非线性耦合。可以通过渐进匹配消去空间变量来导出非线性耦合模扰动磁通的时间演化方程。
- 满足耦合条件 $m = |m' \pm m''|$ 和 $n = |n' \pm n''|$ 的单模可以非线性耦合。非线性耦合效应取决于撕裂模的相对振幅和非线性耦合参数 α_{mn} ，后者由各奇异层处的平衡电流密度梯度的相对斜率决定。
- 通过与其它模的非线性耦合，临界稳定的 m/n 模能够被消稳仅当 $\alpha_{mn} < 0$ 。扰动磁通包括指数增长和代数演化。后者由非线性耦合引起，当扰动磁通增大时会越发重要甚至变成主导。

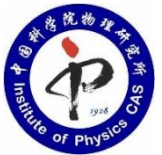
Li & Huo, PoP 1(2) 315 (1994)





目 录

-
- 一、磁流体力学(MHD)理论简介
 - 二、简正模方法 (利用微扰论求解)
 举例: Rayleigh-Taylor不稳定性
 - 三、简正模方法 (利用边界层理论求解)
 举例: 撕裂模不稳定性
 - 四、能量原理方法 (利用变分原理)
 举例: 直线箍缩等离子体柱的不稳定性
 - 五、结论与讨论





能量原理

- 以理想MHD方程组为出发点，线性化之后一阶扰动量的微分方程组为

$$\frac{\partial \rho_1}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho_0 \mathbf{u}_1) = 0$$

$$\rho_0 \frac{\partial \mathbf{u}_1}{\partial t} = -\nabla p_1 + \mathbf{J}_1 \times \mathbf{B}_0 + \mathbf{J}_0 \times \mathbf{B}_1$$

$$\frac{\partial p_1}{\partial t} = -\gamma p_0 \nabla \cdot \mathbf{u}_1 - (\mathbf{u}_1 \cdot \nabla) p_0$$

$$\frac{\partial \mathbf{B}_1}{\partial t} = \nabla \times (\mathbf{u}_1 \times \mathbf{B}_0)$$

$$\mathbf{J}_1 = \frac{1}{\mu_0} \nabla \times \mathbf{B}_1$$

- 令相对于流体元平衡位置 r_0 的扰动位移 $\xi = r - r_0$ 为一阶小量，则有

$$\mathbf{u}_1 = \frac{\partial}{\partial t} \xi(r_0, t)$$

- 将此式分别代入微分方程组，对时间积分，可将扰动密度、扰动压强和扰动磁场均用扰动位移来表示：

$$\rho_1 = -\nabla \cdot (\rho_0 \xi)$$

$$p_1 = -\gamma p_0 \nabla \cdot \xi - (\xi \cdot \nabla) p_0$$

$$\mathbf{B}_1 = \nabla \times (\xi \times \mathbf{B}_0)$$

- 将这些表达式代入运动方程 (5.4.8) 式，并利用安培定律，则可得到关于扰动位移 ξ 的二阶微分方程：

$$\rho_0 \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = F(\xi)$$

- $F(\xi)$ 相当于由扰动位移所引起的作用在单位流体体积上的力。在适当的边界条件下解此方程，可确定平衡位形的稳定性。





能量原理(续)

- $F(\xi)$ 的表达式为

$$\begin{aligned} F(\xi) &= -\nabla p_1 + \frac{1}{\mu_0} (\nabla \times \mathbf{B}_1) \times \mathbf{B}_0 + \frac{1}{\mu_0} (\nabla \times \mathbf{B}_0) \times \mathbf{B}_1 \\ &= \nabla [\gamma p_0 \nabla \cdot \xi + (\xi \cdot \nabla) p_0] + \frac{1}{\mu_0} \{ \nabla \times [\nabla \times (\xi \times \mathbf{B}_0)] \times \mathbf{B}_0 + (\nabla \times \mathbf{B}_0) \times [\nabla \times (\xi \times \mathbf{B}_0)] \} \end{aligned}$$

- 根据能量守恒原理，扰动位移引起的系统总能量的变化为零，即动能和位能的变化之和为零： $(1/2) \int \rho_0 \dot{\xi}^2 d\mathbf{r} + \delta W = 0$ ，将上式对时间微商可得

$$\int \rho_0 \dot{\xi} \cdot \ddot{\xi} d\mathbf{r} + d\delta W/dt = 0$$

- 利用扰动力方程和函数 $F(\xi)$ 的自伴性，即 $\int \eta F(\xi) d\mathbf{r} = \int \xi F(\eta) d\mathbf{r}$ 可得：

$$\int \rho_0 \dot{\xi} \cdot \ddot{\xi} d\mathbf{r} = \int \dot{\xi} \cdot \mathbf{F}(\xi) d\mathbf{r} = \frac{1}{2} \int (\dot{\xi} \cdot \mathbf{F}(\xi) + \xi \cdot \mathbf{F}(\dot{\xi})) d\mathbf{r} = \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \int \xi \cdot \mathbf{F}(\xi) d\mathbf{r}$$

——《等离子体物理学》，李定等编著(2006)





能量原理(续)

- 则由方程 $\int \rho_0 \dot{\xi} \cdot \ddot{\xi} dr + d\delta W/dt = 0$ 可得扰动位能的变化为

$$\delta W = -\frac{1}{2} \int \xi \cdot F(\xi) dr$$

- 从直观上来说, 线性系统在力 $F(\xi)$ 的方向上作位移 ξ 时, 所做的功为 $\xi \cdot F(\xi)/2$ 。根据能量守恒原理, 这个功只可能是以消耗位能为代价, 因此可得此方程。
- 假设等离子体边界为理想导电壁, 因此在边界上垂直位移 $\xi_n = \hat{n} \cdot \xi = 0$ 。将 $F(\xi)$ 的表达式代入上述方程, 可得等离子体内部扰动位能变化的表达式:

$$\delta W_p = \frac{1}{2} \int_V d\mathbf{r} \left\{ \gamma p_0 |\nabla \cdot \xi|^2 + (\nabla \cdot \xi)(\xi \cdot \nabla p_0) + \frac{1}{\mu_0} |\nabla \times (\xi \times \mathbf{B}_0)|^2 - \frac{1}{\mu_0} [\xi \times (\nabla \times \mathbf{B}_0)] \cdot \nabla \times (\xi \times \mathbf{B}_0) \right\}$$

此项恒正
流体可压缩性
的稳定作用

此项大多负
压强梯度驱动的
不稳定性

此项恒正
磁张力的
稳定作用

此项可负
电流驱动的
不稳定性





能量原理(续)

- 如果考虑等离子体边界为真空区，这扰动位能除了上页所示的 δW_p 外，还有等离子体表面的部分

$$\delta W_a = -\frac{1}{2} \oint ds \cdot [(\gamma p_0 \nabla \cdot \xi + \xi \cdot \nabla p_0) \xi + \frac{1}{\mu_0} (\mathbf{B}_1 \cdot \xi) \mathbf{B}_0 - \frac{1}{\mu_0} (\mathbf{B}_1 \cdot \mathbf{B}_0) \xi]$$

- 利用磁场和压强的边界条件，可将 δW_a 分成界面上的扰动位能（表示稳定性取决于界面内外的势能差）

$$\delta W_s = -\frac{1}{2} \int ds |\xi \cdot \mathbf{n}|^2 \nabla_n \left(p_0 + \frac{B_0^2}{2\mu_0} - \frac{B_{0v}^2}{2\mu_0} \right)$$

和真空区中的扰动位能（代表环绕等离子体之真空磁场的势能，总是起稳定作用）

$$\delta W_v = \frac{1}{2} \int d\mathbf{r} \frac{|B_{0v}|^2}{2\mu}$$





能量原理(续)

- 有了扰动位能的一般表达式, 对于具体问题, 在已知平衡位形的情况下, 如果能找到一种位移扰动 $\xi(r, t)$, 使得 $\delta W < 0$, 则可以判断对应的等离子体系统是不稳定的。但问题在于如何选取一个位移扰动 $\xi(r, t)$ 使得 $\delta W < 0$?
- 因为使得 δW 最负的扰动是最不稳定的扰动, 可以采用**逐步挑选** $\xi(r, t)$ 使 δW **不断极小化的方法来求出尽可能低的扰动位能**。当这个位能的极小值 $\delta W < 0$ 时, 相应的 $\xi(r, t)$ 就是使系统不稳定的扰动位移。
- 这表明, 寻求使得 $\delta W < 0$ 的扰动位移 $\xi(r, t)$ 的问题, 可以看做寻找泛函 $\delta W(\xi, \xi)$ 的变分极值问题。



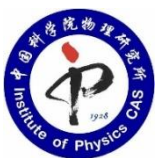


直线箍缩等离子体柱的不稳定性

- 为方便起见，采用另一种物理直观更明显的扰动位能表达式

$$\delta W_p = \frac{1}{2} \int_V dr \left[\frac{1}{\mu_0} |\mathbf{B}_{1\perp}|^2 + \frac{B_0^2}{\mu_0} |\nabla \cdot \xi_\perp + 2\xi_\perp \cdot \kappa|^2 + \gamma p_0 |\nabla \cdot \xi|^2 - \frac{J_0 \cdot \mathbf{B}_0}{B_0^2} (\xi_\perp^* \times \mathbf{B}_0) \cdot \mathbf{B}_{1\perp} - 2(\xi \cdot \nabla p_0)(\xi_\perp^* \cdot \kappa) \right]$$

- 被积函数中第一项恒正，代表磁张力的稳定作用；第二项也恒正，代表流体可压缩性和磁场共同的稳定作用；第三项也恒正，代表流体可压缩性的稳定作用；第四项在有时是负的，可导致平行电流驱动的不稳定性，即扭曲模；第五项有时是负的，可产生压强梯度和磁场曲率共同驱动的不稳定性，即交换模。
- 考虑Z箍缩。通过等离子体柱（半径为a，长度为L）的纵向电流会在柱面上产生角向磁场，假定等离子体的边界为理想导电的金属壳，则有 $\delta W = \delta W_p$ ，边界上没有扰动，不稳定性只在内部发生，通常称之为内模。由于这里 $J_0 \cdot \mathbf{B}_0 = 0$ ，没有平行电流驱动的扭曲模，而只可能有压强梯度和磁场曲率共同驱动的交换模。





直线箍缩等离子体柱的不稳定性

- 在柱坐标中，磁流体在 z 方向是均匀的，在 θ 方向有周期性，故可令试探函数的形式为

$$\xi(r) = \xi(r) \exp[i(m\theta + kz)]$$

- 其中 $m/r = k_\theta$ 为极向波数， k 为轴向波数。通常利用不可压缩性作为使 δW_p 极小化的首选途径。即利用不可压缩条件 $\nabla \cdot \xi = 0$ 来挑选与磁场平行方向的扰动 $\xi_\parallel$ 。由

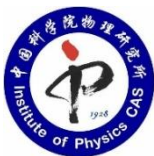
$$\nabla \cdot \xi = \nabla_\perp \cdot \xi + \nabla_\parallel \cdot \xi_\parallel = \left[\frac{1}{r} \frac{d}{dr} (r \xi_r) + ik \xi_z \right] + \frac{im}{r} \xi_\theta = 0$$

- 当 $m \neq 0$ 时，可得

$$\xi_\parallel = \xi_\theta = \frac{i}{m} \left[\frac{d}{dr} (r \xi_r) + ikr \xi_z \right]$$

- 当 $m = 0$ 时，则有

$$\nabla \cdot \xi = \nabla_\perp \cdot \xi = \left[\frac{1}{r} \frac{d}{dr} (r \xi_r) + ik \xi_z \right]$$





$m \neq 0$ 内交换模

- 当 $m \neq 0$ 时, 取 $\nabla \cdot \xi = 0$, 并考虑到 $J_0 \cdot B_0 = 0$, 在完成对 θ 和 z 的积分之后, 扰动位能表达式变成

$$\delta W_p = \pi L \int r dr \left[\frac{1}{\mu_0} |\mathbf{B}_{1\perp}|^2 + \frac{B_\theta^2}{\mu_0} |\nabla \cdot \xi_\perp + 2\xi_\perp \cdot \kappa|^2 - 2(\xi \cdot \nabla p_0)(\xi_\perp^* \cdot \kappa) \right]$$

- 由 $\kappa = \mathbf{b} \cdot \nabla \mathbf{b} = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} (\mathbf{e}_\theta) = -\frac{1}{r} \mathbf{e}_r$, $\xi_\perp \cdot \kappa = -\frac{\xi_r}{r}$, $\nabla_\perp \cdot \xi = \frac{1}{r} [(r\xi_r)' + ikr\xi_z]$, $\mathbf{B}_1 = \nabla \times (\xi \times \mathbf{B}_0)$ 可得

$$B_{1r} = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} (\xi_\perp \times \mathbf{B}_\theta)_z = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} (\xi_r B_\theta) = i \frac{m}{r} \xi_r B_\theta, \quad B_{1z} = -\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} (\xi_\perp \times \mathbf{B}_\theta)_r = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} (\xi_z B_\theta) = i \frac{m}{r} \xi_z B_\theta$$

- 则上面的扰动位能表达式变成

$$\delta W_p = \pi L \int_0^a r dr \left\{ \frac{m^2}{\mu_0 r^2} B_\theta^2 [|\xi_r|^2 + |\xi_z|^2] + \frac{2}{r} \frac{dp_0}{dr} |\xi_r|^2 + \frac{B_\theta^2}{\mu_0} \left[r^2 \left| \frac{d}{dr} \left(\frac{\xi_r}{r} \right) \right|^2 + k^2 |\xi_z|^2 + ikr \frac{d}{dr} \left(\frac{\xi_r^*}{r} \right) \xi_z - ikr \frac{d}{dr} \left(\frac{\xi_r}{r} \right) \xi_z^* \right] \right\}$$





$m \neq 0$ 内交换模

- 对于 $\delta W_p = \pi L \int_0^a r dr I(\xi_r, \xi_z)$, 其被积函数 $I(\xi_r, \xi_z)$ 是 ξ_z 的多项式, 可以通过求极值的方法来使 δW_p 极小化。

$$\frac{\partial I}{\partial \xi_z} = \frac{B_\theta^2}{\mu_0} \left[\frac{m^2}{r^2} \xi_z^* + k^2 \xi_z^* + ikr \frac{d}{dr} \left(\frac{\xi_r^*}{r} \right) \right] = 0$$

注意 ξ_z^* 和 ξ_z 是相互独立的变量。则可求得极值点

$$(\xi_z^*)_{min} = -\frac{ikr^3}{m^2 + k^2 r^2} \frac{d}{dr} \left(\frac{\xi_r^*}{r} \right)_{min}$$

- 将其代入 $I(\xi_r, \xi_z)$, 并利用这两个方程之共轭

$$\frac{m^2}{r^2} \xi_z + k^2 \xi_z - ikr \frac{d}{dr} \left(\frac{\xi_r}{r} \right) = 0$$

$$(\xi_z)_{min} = \frac{ikr^3}{m^2 + k^2 r^2} \frac{d}{dr} \left(\frac{\xi_r}{r} \right)_{min}$$





$m \neq 0$ 内交换模

- 即可得 $I(\xi_r, \xi_z)$ 之极小值

$$I_{min} = \left(\frac{B_\theta^2}{\mu_0} \frac{m^2}{r^2} + \frac{2}{r} \frac{dp_0}{dr} \right) |\xi_r|^2 + \frac{m^2 B_\theta^2 r^2}{\mu_0 (m^2 + k^2 r^2)} \left| \frac{d}{dr} \left(\frac{\xi_r}{r} \right) \right|^2$$

- 注意到 k^2 出现在分母中，故可令 $k^2 \rightarrow \infty$ (即最小波长) 来使 δW_p 进一步极小化。这就是寻求最不稳定的扰动使得 δW_p 最负。当第二项趋于零时， δW_p 的表达式变成

$$\delta W_p = \pi L \int_0^a r dr I_{min, k \rightarrow \infty} = \pi L \int_0^a \frac{dr}{r} \left(\frac{m^2 B_\theta^2}{\mu_0} + 2r \frac{dp_0}{dr} \right) |\xi_r|^2$$

- 当 $\delta W_p < 0$ ，直线箍缩等离子体柱出现不稳定，故 $m \neq 0$ 模的不稳定性判据为

$$\frac{m^2 B_\theta^2}{\mu_0} + 2r \frac{dp_0}{dr} < 0$$

- 第一项恒正，代表磁张力的致稳作用，第二项当 $dp_0/dr < 0$ 时，代表压强梯度的退稳作用，系统稳定与否则取决于两者竞争的结果。这种不考虑边界扰动的由压强梯度驱动的不稳定性称之为 $m \neq 0$ 的内交换模。





$m \neq 0$ 内交换模

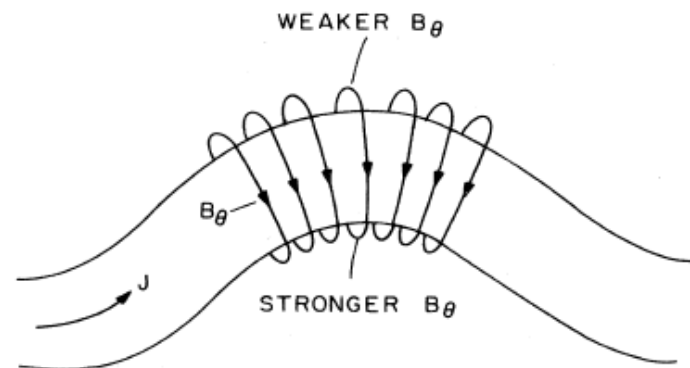
- 由平衡条件可知

$$\frac{dp_0}{dr} = -\frac{B_\theta}{\mu_0 r} \frac{d}{dr}(rB_\theta)$$

- 代入上页的不稳定性判据则有

$$\frac{r^2}{B_\theta} \frac{d}{dr} \left(\frac{B_\theta}{r} \right) > \frac{1}{2} (m^2 - 4)$$

- 对于直线箍缩等离子体来说，一般情况下 B_θ/r 是 r 的递减函数，故上式之左边为负，只有 $m = 1$ 的模能满足上述不稳定性的判据。
- $m = 1$ 内交换模不稳定性的物理图像如图所示。当等离子体柱由于初始扰动产生弯曲时，在弯曲部位凹侧的磁场就会增强而凸侧的磁场则会减弱。即凹侧的致稳作用变强而凸侧的致稳作用变弱，这使得凸侧的扰动向增大的方向发展，等离子体柱将更加弯曲。





$m = 0$ 内交换模

- 当 $m = 0$ 时, $\nabla \cdot \xi = \nabla_{\perp} \cdot \xi$, $\mu_0^{-1} |B_{1\perp}|^2 = 0$, 并考虑到 $J_0 \cdot B_0 = 0$, 在完成对 θ 和 z 的积分之后, 扰动位能表达式变成

$$\begin{aligned} \delta W_p &= \pi L \int r dr \left[\frac{B_{\theta}^2}{\mu_0} |\nabla \cdot \xi_{\perp} + 2\xi_{\perp} \cdot \kappa|^2 + \gamma p_0 |\nabla \cdot \xi_{\perp}|^2 - 2(\xi \cdot \nabla p_0)(\xi_{\perp}^* \cdot \kappa) \right] \\ &= \pi L \int_0^a r dr \left\{ \frac{B_{\theta}^2}{\mu_0} \left[r^2 \left| \frac{d}{dr} \left(\frac{\xi_r}{r} \right) \right|^2 + k^2 |\xi_z|^2 + ikr \frac{d}{dr} \left(\frac{\xi_r^*}{r} \right) \xi_z - ikr \frac{d}{dr} \left(\frac{\xi_r}{r} \right) \xi_z^* \right] \right. \\ &\quad \left. + \gamma p_0 \left[\frac{1}{r^2} \left| \frac{d}{dr} (r \xi_r) \right|^2 + k^2 |\xi_z|^2 + ik \xi_z \frac{1}{r} \frac{d}{dr} (r \xi_r^*) - ik \xi_z^* \frac{1}{r} \frac{d}{dr} (r \xi_r) \right] + \frac{2}{r} \frac{dp_0}{dr} |\xi_r|^2 \right\} \end{aligned}$$

- 类似地, 通过对被积函数 $I(\xi_r, \xi_z)$ 求极值的方法可得

$$\delta W_p = \pi L \int_0^a r dr I \int_0^a \frac{dr}{r} \left[\frac{4\gamma p_0 B_{\theta}^2 / \mu_0}{(B_{\theta}^2 / \mu_0 + \gamma p_0)} + 2r \frac{dp_0}{dr} \right] |\xi_r|^2$$



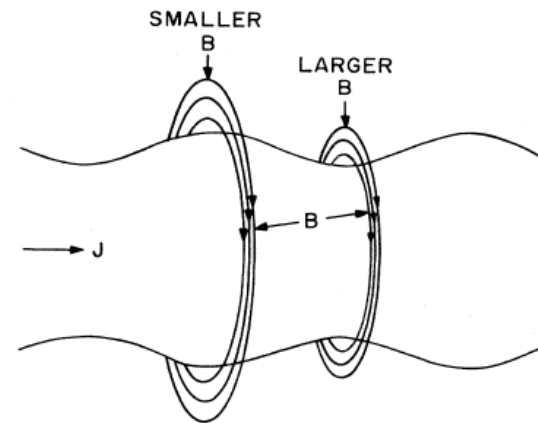


$m = 0$ 内交换模

- 当 $\delta W_p < 0$, 直线箍缩等离子体柱出现不稳定, 故 $m = 0$ 模的不稳定性判据为

$$\frac{2\gamma p_0 B_\theta^2 / \mu_0}{(B_\theta^2 / \mu_0 + \gamma p_0)} + r \frac{dp_0}{dr} < 0$$

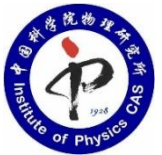
- 第一项恒正, 代表磁张力和压强共同的致稳作用, 而第二项当压强梯度为负时, 代表压强梯度的退稳作用, 系统稳定与否取决于这两者竞争的结果。这种不考虑边界扰动的由压强梯度驱动的不稳定性是 $m = 0$ 的内交换模, 通常称之为腊肠模。
- 腊肠模不稳定性的物理图像如图所示。当等离子体柱由于初始扰动变细时, 由于等离子体总电流不变, 变细部分的电流密度就会变大, 导致其附近向内的磁压增大, 更趋变细, 而压强梯度则由于等离子体柱变细而增大, 使得扰动向增大的方向发展。这种正反馈式的驱动机制最终会使得等离子体柱被截断而崩溃。





目 录

-
- 一、磁流体力学(MHD)理论简介
 - 二、简正模方法（利用微扰论求解）
举例：Rayleigh-Taylor不稳定性
 - 三、简正模方法（利用边界层理论求解）
举例：撕裂模不稳定性
 - 四、能量原理方法（利用变分原理）
举例：直线箍缩等离子体柱的不稳定性
 - 五、结论与讨论





结 论



- 介绍了磁流体力学理论，包括不稳定性分类、磁流体力学方程组和磁流体力学描述方法。
- 以 Rayleigh-Taylor 不稳定性为例，介绍了如何利用微扰论分析了流体重力、磁场和剪切流对 Rayleigh-Taylor 不稳定性的影响。
- 以撕裂模不稳定性为例，介绍了如何利用边界层理论分析线性撕裂模不稳定性、非线性撕裂模不稳定性，包括 Rutherford 模型、以及本人建立的撕裂模线性和非线性的统一模型。
- 前人已导出撕裂模不稳定性判据的一些解析表达式。我们导出的不稳定性判据在极限情况下可涵盖前人的结果，并扩展到包括高能粒子的影响。





讨 论



- 惯性约束聚变中如何抑制Rayleigh-Taylor烧蚀不稳定性的影响依然是个挑战，例如，如何从理论上推导出Takabe经验公式？
- 目前关于撕裂模的演化仍然没有超出准线性模型的理论。Rutherford模型、white的饱和模型都不是真正意义上的非线性模型。仍然缺少撕裂模的非线性模型。
- 即使是针对单模的非线性发展，解析地导出非线性演化方程也非常困难。本人只研究过多个线性模的非线性耦合。而解析多个非线性模的非线性相互作用则更加困难。
- white的撕裂模饱和模型只有在考虑电阻率有径向分布时有效，若假定电阻率为常数，则仍然缺少饱和机制。值得考虑电流密度分布变化导致的电阻层位移，这有可能影响撕裂模的非线性增长和非线性饱和。





祝大家暑期快乐!



图源：黄山旅游

【七古】黄山谣

步韵李白《庐山谣寄卢侍御虚舟》

雄奇立天地，壮丽冠九丘。

卧佛为靠山，绝胜玉屏楼。

黄山归来不看岳，霞客引来万客游。

日出变幻神在傍，云海相映若画张，溢彩如瀑竞流光。

天都云梯百丈长，飞鸟难过鲫鱼梁。

奇松迎客有声望，千年屹立向皓苍。

仙人指路何处去，猴子观海日月长。

怪石飞来两峰间，疑是女娲遗玉还。

高旷开阔日照久，光明绝顶览群山。

太白来此游，豪情频生发。

放歌黄山四千仞，梦笔生花曾出没。

峰似莲花也寄情，云雾缭绕仙境成。

冬令雾凇漫山野，温泉飘雪赛瑶京。

惊叹冰川酿美景，道法自然上太清。

李定2025. 03. 13

李定 20250708_14:00-17:50 科大3教103, 合肥

